

# مراجعة التفاضل والتكامل

## الصف الثالث الثانوى

من اعداد الاستاذ/
ربيع فايد معلم خبير الرياضيات بالمرحلة الثانوية

## مراجعة على الصف الثانى الثانوى

- ميل المماس =المشتقة الاولى =معدل التغير $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ}$ =ظاهـ

∴ شرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق

أن تكون متصلة ونهاية معدل التغير يمين

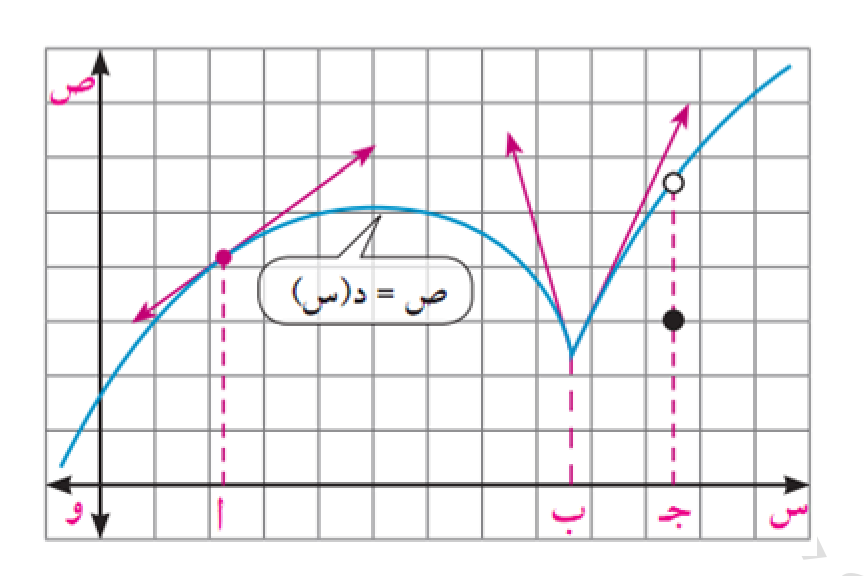
ويسار النقطة موجود ومتساوى القيمة

ادرس الشكل المقابل وبين متى

تكون الدالة غير متصلة

، ومتصلة وغير قابلة للاشتقاق

، وقابلة للاشتقاق




## قواعد الاشتقاق

- مشتقة الدالة الثابتة = صفر مثلا ص=٥ ∴ ص´ = ٠
- ص= $س^{ن}$ ∴ ص´ = $\frac{دص}{دس}$ = ن $س^{ن-1}$ مثلا ص=٣$س^{٥}$ ∴ $\frac{دص}{دس}$ =١٥$س^{٤}$
- إذا كان ع ، υ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن $\frac{د}{دس}(ع \pm υ) = \frac{دع}{دس} \pm \frac{دυ}{دس}$
- إذا كان ع ، υ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن $\frac{د}{دس}(ع \times υ) = \frac{دع}{دس} \times υ + \frac{دυ}{دس} \times ع$
- إذا كان ع ، υ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن $\frac{د}{دس}\left(\frac{υ}{ع}\right) = \frac{\frac{دυ}{دس} \times ع - \frac{دع}{دس} \times υ}{ع^{٢}}$
- **قاعدة السلسلة** : إذا كانت ص=د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، كانت ع=ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن ص=د(ر(س)) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ويكون $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ = د(ر(س)) × ر´ (س)
- مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الاولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الاولى
- مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة البسط × المقام – مشتقة المقام × البسط}}{\text{مربع المقام}}$

مشتقة الجذر التربيعى لدالة = $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$ مثلا ص= $\sqrt{س^{٢}+٣}$ ∴ص´= $\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}}$

- مشتقة جا زاوية = جتا الزاوية × مشتقة الزاوية
- مشتقة جتا زاوية = - جا الزاوية × مشتقة الزاوية
- مشتقة ظا زاوية = قا$^{٢}$الزاوية × مشتقة الزاوية
- مشتقة ظتا زاوية = - قتا$^{٢}$الزاوية × مشتقة الزاوية
- مشتقة قا زاوية = قا الزاوية × ظا الزاوية × مشتقة الزاوية
- مشتقة قتا زاوية =- قتا الزاوية × ظتا الزاوية × مشتقة الزاوية
- الدالة المثلثية لابد أن تكون الزاوية بالتقدير الدائرى بخلاف النسب المثلث (فى المثلث)
- جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١ ، ١+ ظا$^{٢}$س= قا$^{٢}$س ، ١+ ظتا$^{٢}$س = قتا$^{٢}$س
- مشتقة قوس مرفوع لاس خلاف ١- نشتق القوس بالنسبة لنفسه × مشتقة ماداخل القوس
- قاعدة السلسلة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$
- شرط الاشتقاق البارامترى أن يكون لهم مجال مشترك يصوب كتاب المدرسة ص١١
- إذا كان ص=د(ع) ، ع=ر(س) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ =د´(ر(س))×ر´(س)
- إذا كان ص=د(ع) فإن ص´=د´(ع) × ع´ أو نستخدم التعويض
- إذا كانت ص = (ع o ر)(س) ∴ ص =ع(ر(س)) ∴ ص´=ع´(ر(س)) × ر´(س)
- فى حالة الدالة البارامترية إذا امكن التخلص من البارامتر بالتعويض أو الضرب .... بفضل ثم نشتق
- إذا كان ص = $\sqrt[ن]{د(س)}$

**الاشتقاق الضمنى Implicit Defferentiation**

اشتقاق العلاقة الضمنية د(س، ص) = ٠ يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

**الاشتقاق البارامترى Parametric Defferentiation**

المنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن) يكون $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

- المشتقة الثانية هى المشتقة للمشتقة الاولى والثالثة مشتقة المشتقة الثانية وهكذا .......
- فكرة ايجاد المشتقة النونية نستنتج القاعدة التى يمكن بها ايجاد اى مشتقة

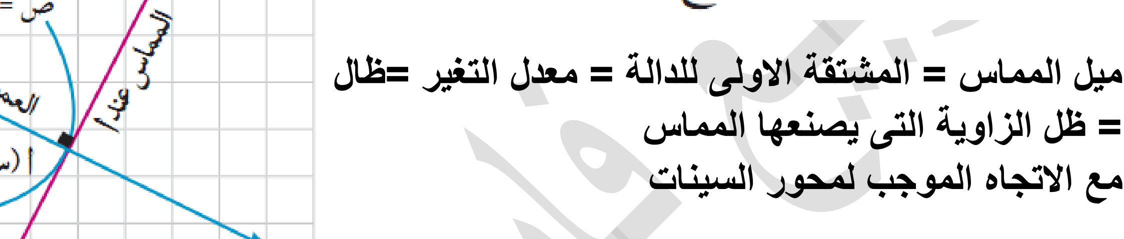
تسمى المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلي :

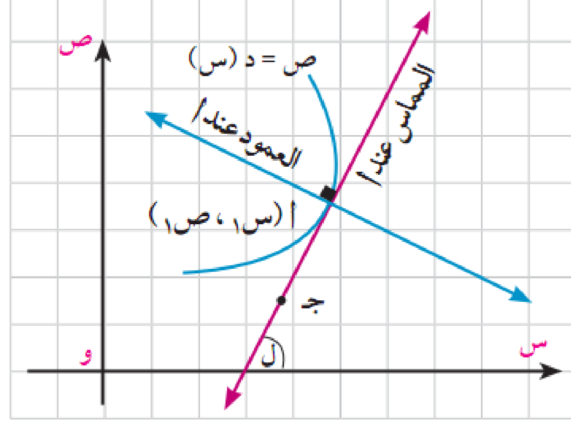
$$\text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}}} = \text{د}^{(\text{ن})}\,(\text{س})$$ حيث ن عدد صحيح موجب

**لاحظ أن :**

١- $\frac{\text{ء}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}^{٢}}$ تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

٢- يوجد اختلاف بين $\frac{\text{ء}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}^{٢}}$ ، $\left(\frac{\text{ء}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}}\right)^{٢}$ فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

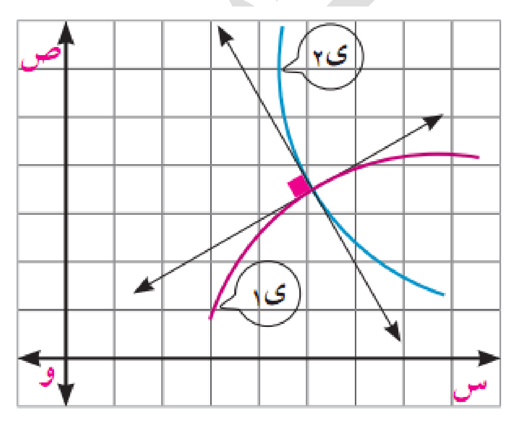





- **ميل المماس = المشتقة الاولى للدالة = معدل التغير =ظال = ظل الزاوية التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**
- **شرط التعامد هو حاصل ضرب الميلين =-١ بينما شرط التوازى تساوى الميلين**
- **معادلة المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١) وميله م هى المعادلة الاحداثية (الكارتيزية) هى**

$$\text{م} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}}$$

- **معادلة المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزء طوله أ و يقطع من محور الصادات جزء طوله ب هى** $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$




- **يقال للمنحنيين أنهما يتقاطعان على التعامد**

**إذا كان المماسان لمنحنييهما متعامدان**

-
- **معدل تغير أى شئ يساوى مشتقته بالنسبة للزمن**
- **تزداد ، تمدد ، تباعد ، تراكم + ،[ تتناقص ، اقتراب ، تسرب ، – ]**

- إذا كانت س. القيمة الابتدائية للمتغير س(عند ن=٠) ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ، س قيمة المتغير بعد زمن ن فإن س = س. + $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ × ن
- نهاية دالة بها اساس وأس نوجد نهاية الاساس والاس(نوزع النهاية)
- نهاية دالة فيها لوغاريتم يمكن التبديل بين النهاية واللوغاريتم
- رسم الدالة الاسية ص = $\text{هـ}^{\text{س}-\text{ب}}+\text{جـ}$ هى رسم الدالة ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ بانتقال (ب ، جـ)
- العدد الطبيعى هـ = $\lim_{\text{س}\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}=\lim_{\text{س}\to 0}(1+\text{س})^{\frac{1}{\text{س}}}=\sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\frac{1}{\text{ن!}}$
- **نتائج** $\lim_{\text{س}\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{كس}}=\text{هـ}^{\text{ك}}$ ، $\lim_{\text{س}\to\pm\infty}\left(1+\frac{\text{ك}}{\text{س}}\right)^{\text{س}}=\text{هـ}^{\text{ك}}$
- **نتائج** $\lim_{\text{ص}\to 0}(1+\text{كص})^{\frac{1}{\text{ص}}}=\text{هـ}^{\text{ك}}$ ، $\lim_{\text{ص}\to 0}(1+\text{ص})^{\frac{\text{ك}}{\text{ص}}}=\text{هـ}^{\text{ك}}$
- $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{أ}^{\text{س}}-1}{\text{س}}=\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$ ، $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{لو}_{\text{أ}}(1+\text{س})}{\text{س}}=\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}$
- **نتائج** $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{لو}_{\text{أ}}(1+\text{كس})}{\text{س}}=\text{ك}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}$ ، $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{س})}{\text{مس}}=\frac{1}{\text{م}}$
- **ملخص النتائج :** $\lim_{\text{س}\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\text{د(س)}}\right)^{\text{ك(س)}}=\text{هـ}^{\lim_{\text{س}\to\pm\infty}\frac{\text{ك(س)}}{\text{د(س)}}}$
- **استخدام قاعدة لوبيتال(فى حالة أختر)** نشتق البسط والمقام كل على حده ثم نوجد النهاية للناتج

## بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي

اللوغاريتم الطبيعي له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها.

إذا كان س $\in$ ع$^{+}$ ، ص $\in$ ع ، أ $\in$ ع$^{+}$ - {١} فإن:

**١)** الصورة لو$_{\text{هـ}}$ س = ص تكافيء الصورة هـ$^{\text{ص}}$ = س

**٢)** هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ = س  **٣)** لو$_{\text{هـ}}$ هـ = ١

**٤)** لو$_{\text{هـ}}$ ١ = صفر  **٥)** لو$_{\text{أ}}$ س = $\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ أ}}$ (خاصية تغيير الأساس)

العدد

الأس أو اللوغاريتم

لو$_{\text{هـ}}$ س = ص  هـ$^{\text{ص}}$ = س

الأساس

لكل س ، ص $\in$ ع$^{+}$ ، ن $\in$ ع

**٦)** لو$_{\text{هـ}}$ س ص = لو$_{\text{هـ}}$ س + لو$_{\text{هـ}}$ ص  **٧)** لو$_{\text{هـ}}$ $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو$_{\text{هـ}}$ س - لو$_{\text{هـ}}$ ص

**٨)** لو$_{\text{هـ}}$ س$^{\text{ن}}$ = ن لو$_{\text{هـ}}$ س  **٩)** لو$_{\text{هـ}}$ س × لو$_{\text{س}}$ هـ = ١

- **مشتقة الدالة ذات الاساس الطبيعى (هـ) يساوى الدالة × مشتقة الاس**
- **مشتقة الدالة اللوغاريتمية ذات الاساس ﻡ يساوى (مشتقة الاس ÷ الدالة )× لـو$_{\text{أ}}$ هـ**
- **مشتقة الدالة ذات متغير لاس يحتوى متغير اما ناخذ لـو$_{\text{هـ}}$ للطرفين**

**أو نستخدم القاعدة (خارج المنهج)** $\text{د(س)}^{\text{ر(س)}}\left[\dfrac{\text{ر(س)}}{\text{د(س)}}\text{ د}'\text{(س)} + \text{ر}'\text{(س) لـو}_{\text{هـ}}\text{ د(س)}\right]$

**الدالة [ $\dfrac{\text{الاس}}{\text{الاساس}}$ × مشتقة الاساس+ مشتقة الاس × لو$_{\text{هـ}}$ للاساس]**

- **أو مشتقة الدالة اللوغاريتمية ذات الاساس ﻡ يساوى الدالة × مشتقة الاس× لـو$_{\text{هـ}}$ أ**
- **يمكن اشتقاق الدالة الكسرية أو الأسية باخذ لـو$_{\text{هـ}}$ للطرفين قبل الاشتقاق وخاصة عندما يكون اساس الدالة اللوغارتيمية متغير (دالة فى س )**
- $\dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لـو}_{\text{أ}}\text{ع}) = \dfrac{\text{ع}'}{\text{ع}} \times \text{لـو}_{\text{أ}}\text{ هـ}$ ، $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{لـو}_{\text{أ}}\text{هـ} = ١$ ، $\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س} = \dfrac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

## مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية

| الدالة | مشتقة الدالة | الشرط |
|---|---|---|
| $هـ^{س}$ | $هـ^{س}$ | س ∈ ع |
| $هـ^{د(س)}$ | $هـ^{د(س)} \cdot د'(س)$ | د قابله للاشتقاق |
| $أ^{س}$ | $أ^{س} لو_{هـ} أ$ | أ > ٠ ، أ ≠ ١ |
| $لو_{هـ} \|س\|$ | $\frac{١}{س}$ | س ≠ ٠ |
| $لو_{هـ} \|د(س)\|$ | $\frac{١}{د(س)} \cdot د'(س)$ | د قابله للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠ |

- إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن: $\int هـ^{د(س)} \times د'(س) ء س = هـ^{د(س)} + ث$
- إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق ، د(س)≠٠ فإن:
  $\int \frac{١}{د(س)} \times د'(س) ء س = لو_{هـ} |د(س)| + ث$
- $\int \frac{أس + ب}{جـس + ء} ء س = \frac{أ}{جـ} س + \left(\frac{ب جـ - أء}{جـ^{٢}}\right) لو_{هـ} |جـس + ء| + ث$ ، درجة البسط =درجة المقام=الاولى
- مثلا: $\int \frac{٥س + ٧}{٢س - ١} ء س = \frac{٥}{٢} س + \left(\frac{١٤ + ٥}{٢^{٢}}\right) لو_{هـ} |٢س - ١| + ث$

$= \frac{٥}{٢} س + \frac{١٩}{٤} لو_{هـ} |٢س - ١| + ث$ ، $\int \frac{٨س}{٢س - ٣} ء س = ٤س + ٦ لو_{هـ} |٢س - ٣| + ث$

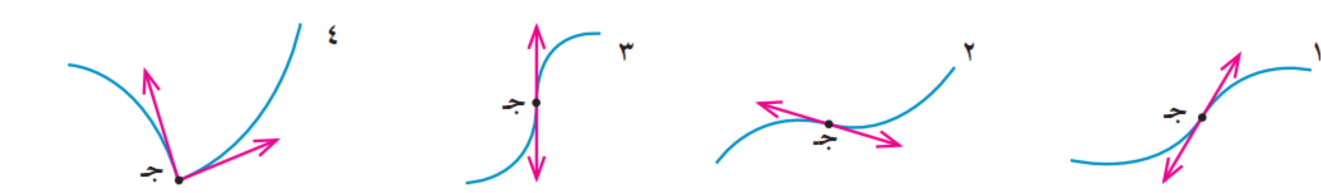
## تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

| الدالة | تكامل الدالة | الشرط |
|---|---|---|
| $هـ^{س}$ | $هـ^{س} + ث$ | س ∈ ع |
| $هـ^{ك س}$ | $\frac{١}{ك} هـ^{ك س} + ث$ | ك ≠ ٠ |
| $هـ^{د(س)} \cdot د'(س)$ | $هـ^{د(س)} + ث$ | د قابلة للاشتقاق |
| $\frac{١}{س}$ | $لو_{هـ} \|س\| + ث$ | س ≠ ٠ |
| $\frac{١}{د(س)} \cdot د'(س)$ | $لو_{هـ} \|د(س)\| + ث$ | د قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ ٠ |

- **إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ] أ ، ب[ فإنها تكون تزايدية على الفترة فى حالة د َ(س)> ٠ لكل س ∈ ] أ ، ب[**
- **إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ] أ ، ب[ فإنها تكون تناقصية على الفترة فى حالة د َ(س)< ٠ لكل س ∈ ] أ ، ب[**

**اى نبحث اشارة المشتقة الاولى لمعرفة فترات التزايد والتناقص بشرط قابلة الاشتقاق**

- **يكون المنحنى محدب لاسفل فى فترة مفتوحة وقابلة للاشتقاق عليها إذا كان المنحنى يقل اسفل مماساته أو فوق أوتاره و د ً(س) > ٠**
- **يكون المنحنى محدب لاعلى فى فترة مفتوحة وقابلة للاشتقاق عليها إذا كان المنحنى يقل فوق مماساته أو تحت أوتاره و د ً(س) < ٠**
- **يكون للمنحنى نقطة انقلاب عند نقطة فى فترة مفتوحة (الدالة متصلة فى الفترة) وللدالة مماس (قابلة للاشتقاق عند النقطة) و فصلت تحدبين مختلفين**




توجد نقط انقلاب للمنحنيات ١ ، ٢، ٣ لتغير اتجاه تحدب المنحنى ووجود مماس له عند جـ

لا توجد نقط انقلاب لعدم وجود مماس عند جـ

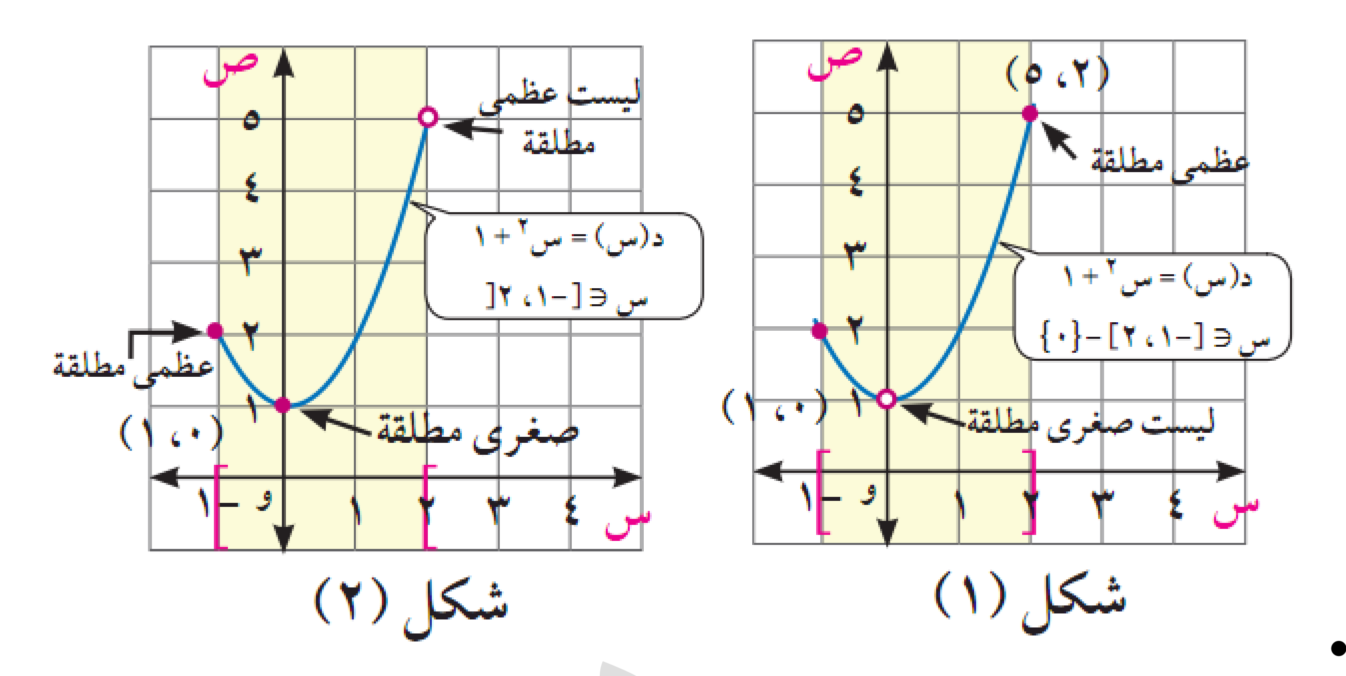
- **الخطوات المطلوبة كما فى المخطط المقابل نوجد مجال الدالة ثم المشتقة الاولى والثانية ومنهما نستنتج النقط الحرجة والقيم العظمى والصغرى المحلية وفترات التحدب ونقطة الانقلاب ، نقاط التقاطع مع محورى الاحداثيات بوضع س=٠ ، ص=٠ ندرس التماثل بالنسبة لمحور الصادات إذا كانت زوجية و التماثل بالنسبة لنقطة الاصل إذا كانت فردية**

مجال د
تماثل الدالة
د َ(س)
د ً(س)
النقط الحرجة
التحدب ونقط الانقلاب
فترات التزايد والتناقص
التقاطع مع المحاور
القيم العظمى والصغرى المحلية
منحنى الدالة

**نرسم المنحنى**

- **النقطة الحرجة شرط أن تكون الدالة متصلة عندها والمشتقة الاولى تساوى صفر أو غير موجودة**
- **القيمة العظمى او الصغرى محلية هى نقطة الدالة قابلة للاشتقاق وتتغير اشارة المشتقة الاولى على يمين ويسار النقطة**

- يمكن اختبار المشتقة الثانية لمعرفة النقطة الحرجة هى قيمة عظمى فى حالة د″(م) <٠ وتكون صغرى فى حالة د″(م) >٠ حيث س=م نقطة حرجة ويفشل الاختبار فى حالة د″(م) =٠
- لايجاد القيم القصوى (الصغرى والعظمى المطلقة) فى فترة مغلقة والدالة متصلة عليها نوجد قيم الدالة عند طرفيها وعند النقط الحرجة أكبر قيمة هى القيمة العظمى المطلقة والصغرى هى الصغرى المطلقة
-
- لاحظ أن




-

## طرق التكامل

- تفاضلى ص = ءص ، تفاضلى س = ءس ،
- **لايجاد التكامل أول شئ**

❶ $\int [د(س)]^{ن} د^{\prime}(س) ءس = \frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث ن ≠ -١

❷ $\int \frac{د^{\prime}(س)}{د(س)} ءس = لـو_{هـ} |د(س)| + ث$ حيث د(س) ≠ ٠

③ هل تكامل مباشر خلاف ذلك نستخدم احدى طرق التكامل

- **يستخدم (غالبا) التكامل بالتعويض**

(١) لايجاد تكامل حاصل ضرب دالتين (أو تركيب الدوال)
(٢) قوس مرفوع لاس عدد × مشتقة ماداخل القوس
(٣) فى وجود جذور غالبا ما نفرض ما تحت الجذر بمتغير لتسهيل التكامل

- **يستخدم (غالبا) التكامل بالتجزئى :** ∫ ص ءع = ص ع – ∫ ع ءص

(١) <u>حاصل ضرب دالتين إحداهما ليست مشتقة الاخرى</u>

نعتبر أحداهما دالة والاخرى مشتقة دالة أخرى نشتق الدالة ونكامل المشتقة حتى نوجد الدالة الاخرى

**=حاصل ضرب الدالتين – تكامل حاصل ضرب ناتج تكامل (مشتقة الثانية) × مشتقة الاولى**

**(٢) دالة أسية × كثيرة حدود ، دالة لوغارتمية × كثيرة حدود ، دالة مثلثية × كثيرة حدود**

- **فى ذكر فى السؤال استخدم احدا طرق التكامل لابد من استخدام التعويض أو التجزئ**

## تكامل الدوال المثلثية

- ∫ قا$^{ن}$ س ظا س ءس = $\frac{1}{ن}$ قا$^{ن}$ س + ث

الاثبات ∫ قا$^{ن}$ س ظا س ءس = ∫ قا$^{ن-1}$ س (قا س ظا س) ءس = $\frac{1}{ن}$ قا$^{ن}$ س + ث

- **جدول التكاملات الاساسية**

| التكامل غير المحدد |
|---|
| ∫ جا س ء س = - جتا س + ث |
| ∫ جتا س ء س = جا س + ث |
| ∫ قا$^{2}$ س ء س = ظا س + ث |
| ∫ قتا$^{2}$ س ء س = |
| ∫ قا س ظا س ء س = |
| ∫ قتا س ظتا س ء س = |

**تذكر أن**

$\frac{ء}{ءس}$ (جا س) = جتا س

$\frac{ء}{ءس}$ (جتا س) = – جا س

$\frac{ء}{ءس}$ (ظا س) = قا$^{2}$ س

$\frac{ء}{ءس}$ (ظتا س) = – قتا$^{2}$ س

$\frac{ء}{ءس}$ (قا س) = قا س ظا س

$\frac{ء}{ءس}$ (قتا س) = – قتا س ظتا س

## التكامل المحدد

- **كل قواعد التكامل غير المحدد تطبق أولا ثم نعوض بحدى التكامل**
- $\int_{أ}^{ب}$ د´(س) ءس = د(ب) – د(أ) **بشرط أن تكون الدالة متصلة فى الفترة [ أ ، ب]**

- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ءس$ بشرط أن تكون الدالة متصلة فى الفترة [ ٩ ، ب] ، وهذه الخاصية صحيحة إذا كانت جـ ∌ [ ٩ ، ب]
- إذا كانت د فردية فإن $\int_{-ب}^{ب} د(س)\,ءس$ =صفر وإذا كانت د زوجية $\int_{-ب}^{ب} د(س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{ب} د(س)\,ءس$
- إذا كانت د دالة متصلة على فترة فإنها تكون قابلة للتكامل على الفترة
- $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ءس$ = صفر بشرط أن تكون الدالة متصلة فى الفترة [ ٩ ، ب]
- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس$ بشرط أن تكون الدالة متصلة فى الفترة [ ٩ ، ب]
- الدالة د(س) =|س+٢| غير قابلة للاشتقاق عند س=-٢ نوجد التكامل خلاف النقطة س=-٢ تقسيم فترات التكامل تكون س=-٢ فاصل
- $\frac{ء}{ءس}\int_{أ}^{س} د(ع)\,ءع = د(س)$ بشرط أن تكون الدالة متصلة
- إذا كانت الدالة د متصلة و زوجية ∴ $\int_{-أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس$
- تكامل المقياس نعرف المقياس وتكون دالة معرفة باكثر من قاعدة أو نوجد اصفار المقياس ونكامل بالقيمة المطلقة
- $\int_{٠}^{نو} \sqrt{نو^٢ - س^٢}\,ءس = \frac{١}{٤}\pi نو^٢$ ، $\int_{-نو}^{نو} \sqrt{نو^٢ - س^٢}\,ءس = \frac{١}{٢}\pi نو^٢$
- 

## اولا:الاسئلة الموضوعية(أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة)

**(بوكلت ١)**

[١] اذا كان ص=لـوهـ س فإن $\frac{ء^{١٠}ص}{ءس^{١٠}}$ = ......... ( $\frac{-\lfloor ٩}{س^{١٠}}$ ، $\frac{-\lfloor ١٠}{س^{٩}}$ ، $\frac{\lfloor ٩}{س^{١٠}}$ ، $\frac{\lfloor ١٠}{س^{٩}}$ )

[٢] اذا كان د(س) = هـ $^{لـوهـ(س^٣-٢س+١)}$ فإن د َ(٠) = ...... ( -٤ ، -٢ ، ٠ ، ٢ )

[٣] إذا كان د(س) = $(جتاس)^{جتاس}$ فإن د َ(صفر) = ..... ( -٣ ، -٢ ، -١ ، صفر)

[٤] مثلث متساوى الاضلاع ضلعه يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ سم/ث فإن معدل تغير محيطه عند هذه اللحظة يساوى ........ سم ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ )

[٥] اذا كان د(س) = س – س لـوهـ س فإن ميل المماس للمنحنى عند س=هـ يساوى ......

( ٠ ، -١ ، ١ ، هـ )

[٦] اذا كان د(س) = لـوهـ جاس –لـوهـ جتاس فإن د َ( $\frac{\pi}{٤}$ ) = ..... ( ٢ ، -٢ ، ١ ، -١)

[٧] اذا كان د(س) = هـ $^{ظاس}$ فإن $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{د(س) - د(\frac{\pi}{٤})}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = ...... ( هـ ، ٢هـ ، هـ$^٢$ ، ٢هـ$^٢$ )

[٨] $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س+٥}{س+٣}\right)^{س}$ = ....... ( هـ ، هـ$^٢$ ، $\frac{١}{هـ}$ ، $\frac{٢}{هـ}$ )

[٩] $\int_{-١}^{١} \frac{س^٣}{س^٤+جتاس} ءس$ = ......... ( -١ ، صفر ، ١ ، ٤ )

[١٠] $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤-س^٢}\ ءس$ = ........ ( صفر ، ٢ ، π ، $\frac{\pi}{٢}$ )

[١١] $\int_{٠}^{١٠\pi} |جاس| ءس$ = ........ ( ١٠ ، ١٠ π ، ٢٠ ، ٢٠ π )

[١٢] $\int_{١}^{هـ} (لـوهـ س) ءس$ = ......... ( $\frac{١}{هـ}$ ، هـ ، ١ ، -١ )

[١٣] إذا كانت د(س) = لـوهـ هـ^س فإن د´(س) = ....... ( ١ ، س ، هـ^-س ، هـ^س )

[١٤] إذا كانت د(س) = ظاس فإن د´´( $\frac{\pi}{4}$ ) = ...... ( -٤ ، ٢ ، ٤ ، ٤$\sqrt{2}$ )

[١٥] $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^س - ٢^س}{س}$ = ....... ( لـوهـ ٣ ، لـوهـ $\frac{٣}{٢}$ ، لـوهـ $\frac{٢}{٣}$ ، لـوهـ ٣ - ٢ )

[١٦] إذا كان د(٢س) = س^٢ + س فإن د´(١) = ..........(٥ ، ٣ ، ٢ ، ١)

[١٧] إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب عند س=١ حيث د(س)= س^٣ + ك س^٢ + ٤
فإن ك = ........ ( -٦ ، -٣ ، ٣ ، ٦ )

[١٨] $\int \frac{س+٢}{س+١}$ ءس = .........

(أ) ١ + لو(س+١) + ث     (ب) س – لو |س+١| + ث

(جـ) س + لو (س+١) +ث     (د) س + لو|س +١| + ث

[١٩] $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٢س+١}{٢س-١}\right)^س$ = ........... ( ١ ، -١ ، هـ ، ٢ هـ )

[٢٠] إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{٣}^{٤}$ د(س) ءس = ٣ ، $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس = ٤

فإن $\int_{٥}^{٤}$ د(س) ءس = ...... ( صفر ، ١ ، -١ ، ٢)

[٢١] $\int_{٠}^{\frac{\pi}{4}}$ قا^٢س ظاس ءس = .......... ( صفر ، ٠,٥ ، ١ ، ٢)

[٢٢] إذا كان ص=ن^٣ ، ع =ن^٢ فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع عندما ن=١
يساوى ......... (٦ ، ١ ، ١,٥ ، ٢)

[٢٣] أصغر قيم المقدار س^٣ -٣س + ٥ حيث س ∋ [ ٠ ، ٢] هى ......... (١ ، -٢ ، ٢ ، ٣)

[٢٤] $\int_{١}^{هـ} \frac{(١+لـو س)^{٧}}{س} ءس$ = ....... ( $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٢٥٥}{٨}$ ، ٢٥٦ )

(بوكلت٣)

[٢٥] اذا كان د(س) = ظتاس فإن د‵‵($\frac{\pi}{٤}$) = .......... ( $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٤ )

[٢٦] $\lim_{س \to ٠} (١+٢جاس)^{قتاس}$ = ............ ( هـ ، هـ$^{٢}$ ، صفر ، ١ )

[٢٧] $\int هـ^{جتاس} \times جاس ءس$ = ....... + ث ( هـ$^{جتاس}$ ، ــ هـ$^{جاس}$ ، ــ هـ$^{جتاس}$ ، هـ$^{جاس}$ )

[٢٨] حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص= |س| والمستقيمين س=-١ ، س=١ دورة كاملة حول محور السينات = ..... $\pi$ ( $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٤}{٣}$ )

[٢٩] إذا كان منحنى الدالة د محدب لأسفل فى الفترة ما فإن .......... فى هذه الفترة

( د‵‵(س) > ٠ ، د‵‵(س) < ٠ ، د‵(س) > ٠ ، د‵(س) < ٠ )

[٣٠] اذا كان س$^{٣}$ + ٣س ص$^{٢}$ = ص$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ ص فإن ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة ...........

( -١ ، صفر ، ١ ، ٢ )

[٣١] إذا كان $\int_{١}^{٤} ر(س) ءس = ٧$ ، $\int_{٤}^{١} د(س) ءس = ٣$ فإن $\int_{١}^{٤} [د(س) + ٢ر(س)] ءس$ = .......

( ١ ، ٤، ٧ ، ١٠ )

[٣٢] إذا كان د‵(س) = س د(س) ، د(٣) = -٥ فإن د‵‵(٣) = ........

( -٥٠ ، ٤ ، ١٥ ، ٢٧ )

[٣٣] إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى ص= د(س) عند النقطة (٢ ، ١) هى س + ٣ص =٥

فإن د‵(٢) = ........... ( -٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-١}{٣}$ ، ٣ )

(بوكلت٤)

[٣٤] مثلث مساحته ثابتة وتساوى ١ متر مربع إذا كان ارتفاع المثلث يتناقص بمعدل ١ م/ث فإن معدل تزايد قاعدته عند اللحظة التى يكون فيها ارتفاعه نصف متر يساوى ...... م/ث (١ ، ٢، ٤ ، ٨)

[٣٥] $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١} ءس$ = .......

( $١+هـ^{س}$ ، $لو_{هـ}|س+١|+ث$ ، $لو_{هـ}|هـ^{س}+١|+ث$ ، $لو_{هـ}|هـ^{-س}+١|+ث$ )

[٣٦] المساحة المحصورة بين المنحنى ص= $\frac{٢}{س}$ ومحور السينات فى الفترة [ ١ ، ٢]

تساوى ......... وحدة مساحة ( $لو_{هـ}٢$ ، $٢لو_{هـ}٢$ ، ٤ ، $لو_{هـ}\frac{١}{٢}$ ، ٤ )

[٣٧] $\int_{٠}^{٢} (س+٦)^{٢} هـ^{س^{٢}} ءس - \int_{٠}^{٢} (س-٦)^{٢} هـ^{س^{٢}} ءس$ = .........

[ $١٢هـ^{٤}$ ، $١٢ هـ^{٤} - ١$ ، $٦هـ^{٤} - ٦$ ، $١٢( هـ^{٤} - ١)$ ]

[٣٨] ميل المماس للمنحنى $٢س ص^{٢}$ + س ص = ص عندما ص=١ يساوى ..........

( $-\frac{٩}{٢}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢}{٩}$ )

[٣٩] $٣ \int جا٢س جا^{٤}س ءس$ = .........

[ $جا^{٤}س جتا^{٢}س + ث$ ، $جتا^{٤}س جا^{٢}س + ث$ ، $جا^{٦}س + ث$ ، $جتا^{٦}س + ث$ ]

[٤٠] إذا كانت د : ح ← ح حيث د(س) = $س^{٣}$ - ٣س فإن

(أ)منحنى الدالة له نقطة انقلاب ومحدب لأعلى فى الفترة ] - ∞ ، ٢ [

(ب) منحنى الدالة له نقطة انقلاب ومحدب لأسفل فى الفترة ] ٠ ، ٢[

(جـ) الدالة د تناقصية فى الفترة ] ٠ ، ٢ [

(د) لمنحنى الدالة د مماس أفقى عند النقطة (١ ، -٢)

[٤١] إذا كانت د: ح+ ← ح حيث د(س) = س $لو_{هـ}$س فإن

(أ)الدالة تزايدية على الفترة ] هـ ، ∞ [ (ب) الدالة تزايدية على الفترة ] ٠ ، $\frac{١}{هـ}$ [

(جـ) الدالة تناقصية على الفترة ] هـ ، ∞ [ (د) الدالة تناقصية على الفترة ] ٠ ، $\frac{١}{هـ}$ [

[٤٢] اذا كانت $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س+ك}\right)^{س} = هـ$ فإن ك = ..... (١ ، -١ ، -٢ ، ٢)

## اجابات الاسئلة الموضعية

| | | |
|---|---|---|
| (١) $-\frac{9!}{س^{10}}$ القاعدة $(-1)^{ن+1}\frac{(ن-1)!}{س^{ن}}$ | (٢) -٢ | (٣) صفر |
| (٤) ١ | (٥) -١ | (٦) ٢ |
| (٧) ٢ هـ | (٨) $هـ^{2}$ | (٩) صفر |
| (١٠) π | (١١) ٢٠ | (١٢) ١ |
| (١٣) ١ | (١٤) ٤ | (١٥) $لو_{هـ} \frac{3}{2}$ |
| (١٦) ١ | (١٧) -٣ | (١٨) (د) |
| (١٩) هـ | (٢٠) -١ | (٢١) ٠,٥ |
| (٢٢) ١,٥ | (٢٣) ١ | (٢٤) $\frac{255}{8}$ |
| (٢٥) ٤ | (٢٦) $هـ^{2}$ | (٢٧) $- هـ^{جتاس}$ |
| (٢٨) $\frac{2}{3}\pi$ | (٢٩) $د''(س) < 0$ | (٣٠) ١ |
| (٣١) ١ | (٣٢) -٥٠ | (٣٣) ٣ |
| (٣٤) ٨ | (٣٥) $لو_{هـ}\|س+1\| + ث$ | (٣٦) $2 لو_{هـ} 2$ |
| (٣٧) ١٢ $(هـ^{4} - 1)$ | (٣٨) $-\frac{9}{2}$ | (٣٩) $جا^{6}س + ث$ |
| (٤٠) (د) | (٤١) (د) | (٤٢) -١ |
| (٤٣) | (٤٤) | (٤٥) |
| (٤٦) | (٤٧) | (٤٨) |
| (٤٩) | (٥٠) | (٥١) |
| (٥٢) | (٥٣) | (٥٤) |
| (٥٥) | (٥٦) | (٥٧) |
| (٥٨) | (٥٩) | (٦٠) |

## ثانيا:الاسئلة المقالية

**(بوكلت ١)**

**[١] فى الشكل المقابل:**

**اذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات والمستقيم س=-١ ، س=ك تساوى $\frac{\pi}{٢}\left(هـ^{١٠}-هـ^{-٢}\right)$ وحدة مكعبة**

**أوجد قيمة ك**



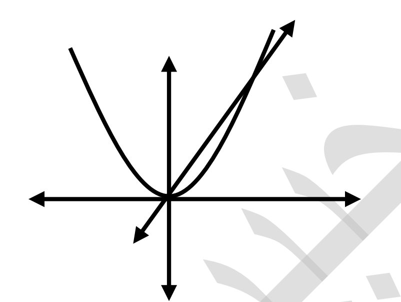
$$\because \quad ح = \pi\int_{-١}^{ك} هـ^{٢س}\,ءس \qquad \therefore \frac{\pi}{٢}\left(هـ^{١٠}-هـ^{-٢}\right) = \pi\int_{-١}^{ك} هـ^{٢س}\,ءس$$

$$\therefore \left(هـ^{١٠}-هـ^{-٢}\right) = \int_{-١}^{ك} ٢هـ^{٢س}\,ءس \qquad \therefore \left(هـ^{١٠}-هـ^{-٢}\right) = \left[هـ^{٢س}\right]_{-١}^{ك}$$

$$\therefore \left(هـ^{١٠}-هـ^{-٢}\right) = هـ^{٢ك} - هـ^{-٢} \qquad \therefore ك = ٥$$

**[٢] أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص= س$^{٢}$ والمستقيم ص=٢س دورة كاملة حول محور السينات**





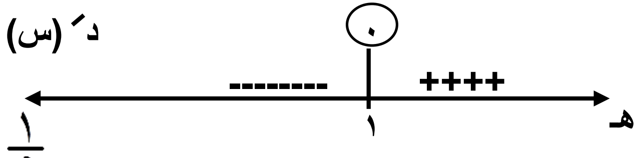
**نقط التقاطع ∴ س$^{٢}$ =٢س ∴ س=٠ ، ٢ ، بوضع ص=٠ ∴ س = ٠**

$$\therefore \quad ح = \left|\pi\int_{٠}^{٢} \left(س^{٤} - ٤س^{٢}\right)ءس\right| = \frac{٦٤}{١٥}\pi$$

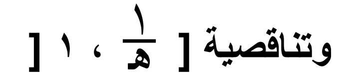
**[٣] إذا كان د: ] $\frac{١}{هـ}$ ، هـ [ ← ح و كان د(س) =س - لـو$_{هـ}$ س ابحث فترات التزايد والتناقص ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة**



**د´(س) = ١ - $\frac{١}{س}$ بوضع د´(س) = ٠ ∴ س = ١ لاحظ $\frac{١}{هـ}$ ≈ ٠,٣٧ ، هـ ≈ ٢,٧**




الدالة تزايدية فى الفترة ] ١ ، هـ [




∵ د(١) = ١ - لـو$_{هـ}$١ = ١

∴ د$(\frac{1}{هـ})$ = $\frac{1}{هـ}$ - لـو$_{هـ}$ $\frac{1}{هـ}$ = $\frac{1}{هـ}$ + ١ ≈ ١,٣٧ ،

د(هـ) = هـ - ١ ≈ ١,٧

∴ القيمة العظمى المطلقة ≈ ١,٧

، الصغرى المطلقة = ١

**[٤]** باستخدام احد طرق التكامل أوجد $\int_{٠}^{لـو٣} (هـ^{٢س} + هـ^{س})\, ءس$

بفرض ع = هـ$^{س}$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = هـ^{س}$ ∴ ءع = هـ$^{س}$ ءس

∵ ع = هـ$^{س}$ باخذ لـو$_{هـ}$ للطرفين ∴ س = لـو$_{هـ}$ ع ، وعند س = لـو$_{هـ}$٣ ∴ ع = ٣

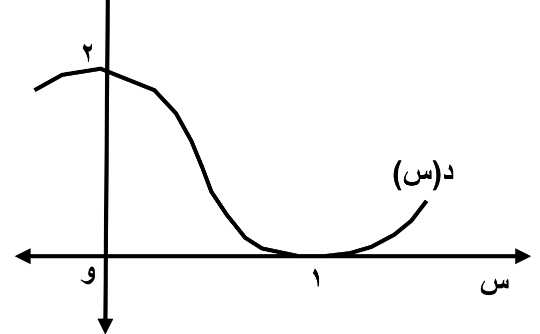
∴ $\int_{٠}^{لـو٣} (هـ^{٢س} + هـ^{س})\, ءس = \int_{٠}^{لـو٣} هـ^{٢س}\, ءس + هـ^{س}\, ءس = \int_{٠}^{لـو٣} هـ^{س} \times هـ^{س}\, ءس + هـ^{س}\, ءس$

$= \int_{٠}^{٣} ع\, ءع + ءع = \left[\frac{1}{2}ع^{٢} + ع\right]_{٠}^{٣} = ٧,٥$

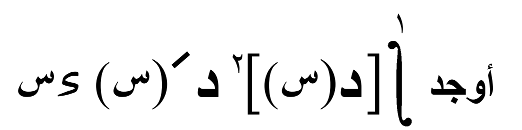
**[٥]** باستخدام احد طرق التكامل أوجد $\int لـو_{هـ} س\, ءس$

بالتجزئى ∴ $\int لـو_{هـ} س\, ءس$ = س لـو$_{هـ}$ س - $\int س \times \frac{1}{س}\, ءس$ = س لـو$_{هـ}$ س - س + ث





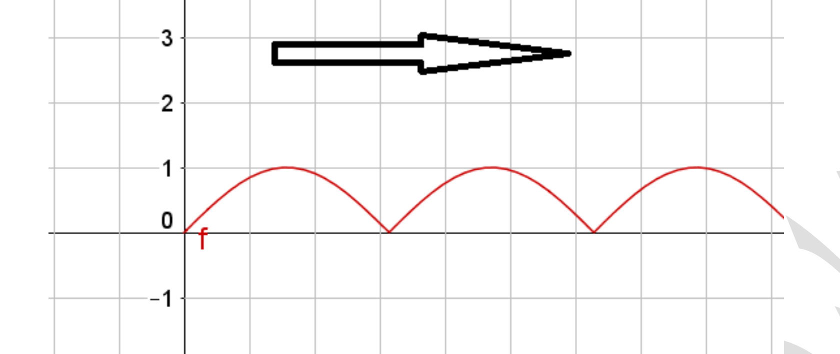

**[٦]** فى الشكل المقابل



أوجد $\int_{0}^{1} [د(س)]^{2} \, د'(س) \, ءس$

$$= \left[\frac{1}{3}[د(س)]^{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}\left[[د(١)]^{3} - [د(٠)]^{3}\right] = \frac{1}{3}\left[[د(١)]^{3} - [د(٠)]^{3}\right] = -\frac{8}{3}$$

**[٧]** أوجد $\int_{0}^{10\pi} |جاس| \, ءس$




$$= 10\int_{0}^{\pi} جاس \, ءس = 10\left[-جتاس\right]_{0}^{\pi}$$

= ٢٠

**[٨]** اوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $2 + \log_{ه} ص \log_{ه} س = س^{2} + ص$ عند النقطة التى احداثيها السينى س=١



عند س=١ ∴ $2 + \log_{ه} ص \log_{ه} 1 = 1^{2} + ص$ ∴ ص = ١ ∴ نقطة التماس (١ ، ١)

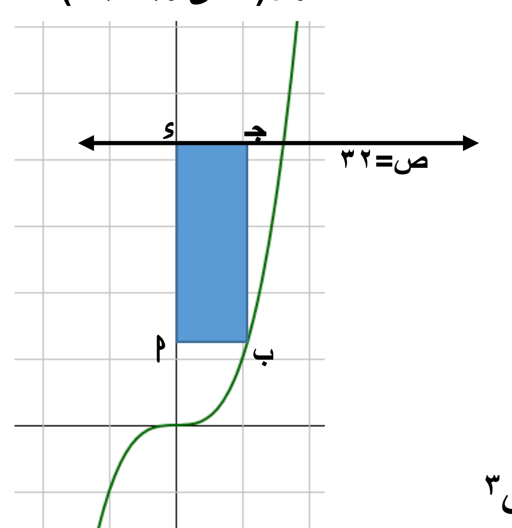
∵ $2 + \log_{ه} ص \log_{ه} س = س^{2} + ص$ بالاشتقاق بالنسبة الى س

∴ $0 + \frac{ص'}{ص}\log_{ه} س + \frac{1}{س}\log_{ه} ص = 2س + \frac{ءص}{ءس}$ وعند نقطة التماس

∴ $0 + \frac{ص'}{1}\log_{ه} 1 + \frac{1}{1}\log_{ه} 1 = 2 \times 1 + \frac{ءص}{ءس}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -2$ ∴ ميل العمودى = $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{ص - 1}{س - 1} = -2$ ، ∴ معادلة المماس ص - ١ = -٢س + ٢ ⟸ ص +٢س = ٣

، $\frac{ص - 1}{س - 1} = \frac{1}{2}$ ∴ معادلة العمودى ∴ ٢ص - ٢ = س - ١ ⟸ ٢ص – س =١




**[٩]** فى الشكل المقابل:

د(س) = $س^{٣}$

أوجد اكبر مساحة للمستطيل م ب جـ ء



بفرض ب(س ، ص ) تحقق معادلة المنحنى

∴ عرض المستطيل = س ، طوله = ٣٢ – ص = ٣٢ – $س^{٣}$

∴ م = س(٣٢ – $س^{٣}$ ) = ٣٢س – $س^{٤}$ ∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٣٢ – ٤$س^{٣}$

، $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = -١٢$س^{٢}$ بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ س = ٢ عظمى

∴ أكبر مساحة = ٣٢×٢ – $٢^{٤}$ = ١٦ وحدة مربعة

**بوكلت(٢)**

**[١٠]** أوجد ❶ $\frac{د}{دس}$(لـو$س^{٢}$ – ظتا٢س)   ❷ $\int$($س^{٢هـ}$ + $هـ^{٢س}$ + $\frac{٢}{س}$)دس



❶ $\frac{د}{دس}$(٢لـوس – ظتا٢س) = ٢ × $\frac{١}{س}$ × لـوهـ + $\frac{١}{٢}$قتا$^{٢}$٢س = $\frac{٢لـوهـ}{س}$ + $\frac{١}{٢}$قتا$^{٢}$٢س

❷ $\int$($س^{٢هـ}$ + $هـ^{٢س}$ + $\frac{٢}{س}$)دس = $\frac{س^{٢هـ+١}}{٢هـ+١}$ + $\frac{١}{٢}$$هـ^{٢س}$ + ٢لـو$_{هـ}$|س| + ث

**[١١]** يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوى على حائط رأسى إذا انزلق الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث فأوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض $\frac{\pi}{٤}$



بفرض طول السلم = ل ثابت ومن فيثاغورث ، $\frac{دس}{دن}$ = ٣٠سم/ث

وعندما هـ = $\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥° ∴ س = ص ∴ س = ص = $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$

∴ $س^٢ + ص^٢ = ل^٢$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ∴ $٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$ ÷ ٢

∴ $س \frac{دس}{دن} + ص \frac{دص}{دن} = ٠$ ∴ $\frac{ل}{\sqrt{٢}} \times ٣٠ + \frac{ل}{\sqrt{٢}} \times \frac{دص}{دن} = ٠$ ∴ $\frac{دص}{دن} = -٣٠$ سم/ث

**[١٢] إذا كان محيط قطاع دائرى =١٢سم فأوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن**

∵ محيط القطاع = ٢نق + ل ∴ ل =١٢ -٢نق ⇐ (١) ،

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل× نق = $\frac{١}{٢}$نق(١٢-٢نق) = ٦نق – $نق^٢$ بالاشتقاق بالنسبة لـ نق

∴ $\frac{دم}{دنق} = ٦ - ٢نق$ ، $\frac{د^٢م}{دنق^٢} = -٢ < ٠$ ، بوضع $\frac{دم}{دنق} = ٠$ ∴ نق =٣ قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة عند نق=٣ ، ل = ١٢ - ٢×٣ = ٦ سم ∴ $\theta^د = \frac{ل}{نق} = \frac{٦}{٣} = ٢^د$

**[١٣]** أوجد $\int_{٠}^{٤} |٢س - ٤| \, دس$



بوضع ٢س – ٤ =٠ ∴ س = ٢

∴ $\int_{٠}^{٤} |٢س - ٤| \, دس = \left| \int_{٠}^{٢} (٢س - ٤) \, دس \right| + \left| \int_{٢}^{٤} (٢س - ٤) \, دس \right| = |-٤| + |٤| = ٨$

[١٤] ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د والذى له الخواص التالية:

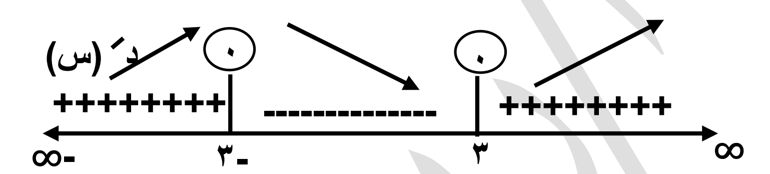
د(-٣)=٨ ، د(٠) = ٤ ، د(٣) = ٠ ، د´(س) > ٠ عندما |س| > ٣ ،

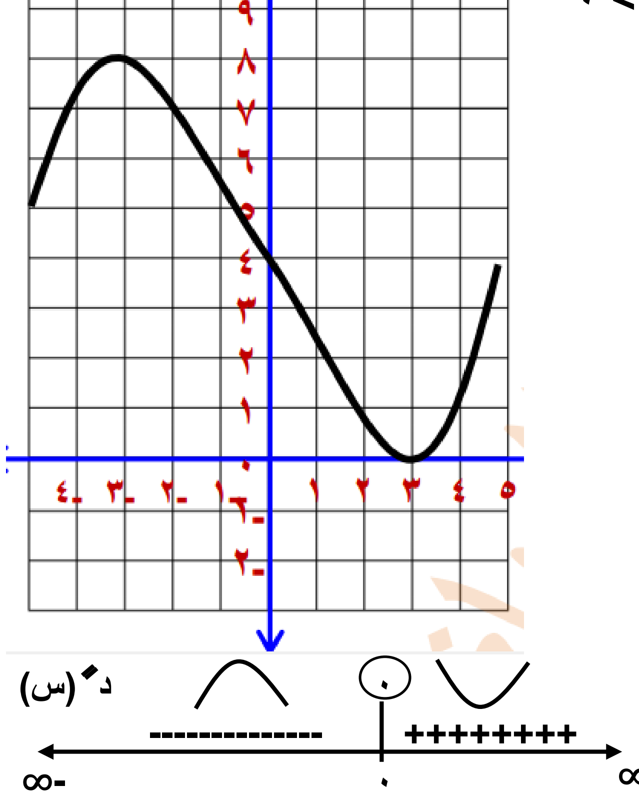
د´(س) < ٠ عندما |س| < ٣

، د″(س) > ٠ عندما س < ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س > ٠



النقط (-٣ ، ٨) ، (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠) يمر بها المنحنى



الدالة تناقصية فى الفترة ] -٣ ، ٣ [

، الدالة تزايدية فى الفترة ح – ]-٣ ، ٣[

(٣ ، ٠) قيمة صغرى ، (-٣ ، ٨) عظمى

المنحنى محدب لاسفل ] ٠ ، ∞ [

، ولاعلى ] - ∞ ، ٠[

(٠ ، ٤) نقطة انقلاب

[١٥] أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص= $\frac{٤}{س}$ ، ص=٥ – س

دورة كاملة حول محور السينات

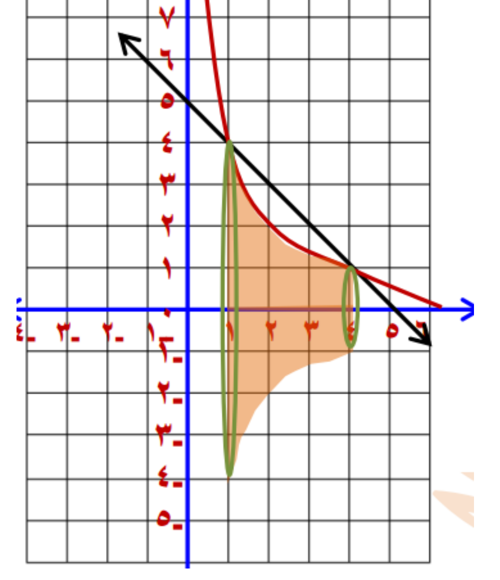


بحل المعادلتين ∴ $\frac{٤}{س}$ = ٥-س ∴ س$^{٢}$ -٥س + ٤= ٠

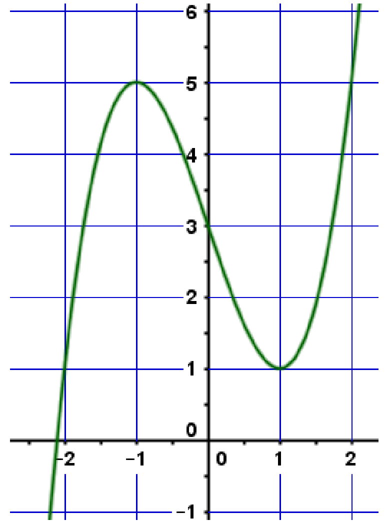
∴ س = ٤ أ، ١

$$\therefore ح = \pi \int_{١}^{٤} \left[ (٥ - س)^{٢} - \left(\frac{٤}{س}\right)^{٢} \right] ءس$$

$$= \pi \int_{١}^{٤} \left[ ٢٥ - ١٠س + س^{٢} - ١٦س^{-٢} \right] ءس$$ = ٩ π وحدة مكعبة



**[١٦] أوجد المساحة تحت منحنى الدالة د حيث د(س)= $س^3$ -٣س + ٣ والمحصورة بين المستقيمين س=٠ ، س=٢**




المساحة = $\int_{0}^{2} (س^3 - 3س + 3)\, ءس$

= $\left[\frac{1}{4}س^4 - \frac{3}{2}س^2 + 3س\right]_{0}^{2}$ = ٤ وحدة مربعة

**[١٧] إذا كان ميل العمودى على المماس لمنحنى الدالة د هو $\frac{1}{3 - 3س^2}$ فأوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الدالة د ونقط الانقلاب إن وجدت علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (-٢ ، -١)**

∴ ميل المماس = ٣$س^2$ - ٣ ∴ د´(س) = ٣$س^2$ - ٣ باجراء التكامل ∴ ص = $س^3$-٣س +ث

∴ المنحنى يمر بالنقطة (-٢ ، -١) ∴ -١ = -٨ +٦ + ث ∴ ث = ١ ∴ ص = $س^3$-٣س + ١

∵ د´(س) = ٣$س^2$ - ٣ ∴ د´´(س) =٦س بوضع د´(س) =٠ ∴ س = ± ١

∴ د´´(١) > ٠ ∴ (١ ، -١) صغرى محلية ، ∵ د´´(-١) < ٠ ∴ (-١ ، ٣) عظمى محلية

بوضع د´´(س)=٠ ∴ س= ٠ تفصل تحدبين ولها مماس واحد

∴ (٠ ، ١) نقطة انقلاب

د´´(س) --- +++
٠

**بوكلت(٣)**

**[١٨] أوجد $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س+1}\right)^{س}$**

= $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س+1-1}{س+1}\right)^{س}$ = $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{-1}{س+1}\right)^{س}$

وبفرض ص= $\frac{-1}{س+1}$ ∴ عندما س ← ∞ ∴ ص ← ٠ ، س = $-1 - \frac{1}{ص}$

∴ $\lim_{س \to \infty} (1+ص)^{-1-\frac{1}{ص}} = \lim_{س \to \infty} (1+ص)^{-1} \times \lim_{س \to \infty} (1+ص)^{-\frac{1}{ص}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{١}{(١+ص)} \times \lim_{س \to \infty} \left((١+ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-١}$ = صفر × هـ$^{-١}$ = صفر

**[١٩]** أوجد $\int \frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس} \, ءس$



∵ البسط مشتقة المقام

∴ $\int \frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس} \, ءس$ = $لو_{هـ} |جاس - جتاس| + ث$

**[٢٠]** إذا كانت ص= س$^{س}$ فأثبت أن ص$''$ = ص(١ + لو$_{هـ}$ س )$^{٢}$ + س$^{س-١}$



∵ ص= س$^{س}$ باخذ لو$_{هـ}$ للطرفين لان الاساس والاس متغير ∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ س ⇐ (١)

بالاشتقاق بالنسبة الى س للطرفين ∴ $\frac{ص'}{ص} = لو_{هـ} س + س \times \frac{١}{س}$

$\frac{ص'}{ص} = لو_{هـ} س + ١$ ∴ $ص' = ص(لو_{هـ} س + ١)$ بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص'(لو_{هـ} س + ١) + \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص(لو_{هـ} س + ١)(لو_{هـ} س + ١) + \frac{ص}{س}$ = $ص(لو_{هـ} س + ١)^{٢} + \frac{س^{س}}{س}$

= ص(١ + لو$_{هـ}$ س )$^{٢}$ + س$^{س-١}$

**[٢١]** أوجد $\int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} \, ءس$



$= \int (٣س هـ^{-٢س} + ٥هـ^{-٢س}) \, ءس$ = $\int ٣س هـ^{-٢س} \, ءس + \int ٥هـ^{-٢س} \, ءس$ = ت$_{١}$ + ت$_{٢}$

حيث ت$_{١}$= $\int ٣س هـ^{-٢س} \, ءس$ بالتجزئى ، ت$_{٢}$ = $\int ٥هـ^{-٢س} \, ءس = \frac{٥}{-٢} هـ^{-٢س} + ث$

$ت_١ = \int ٣س هـ^{-٢س} ءس = \frac{٣}{-٢} س هـ^{-٢س} - \int \frac{٣}{-٢} هـ^{-٢س} ءس = \frac{٣}{-٢} س هـ^{-٢س} - \frac{٣}{٤} هـ^{-٢س} + ث$

$\therefore \int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} ءس = \frac{٣}{-٢} س هـ^{-٢س} - \frac{٣}{٤} هـ^{-٢س} - \frac{٥}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

**[٢٢] قطعة من الثلج على شكل متوازى مستطيلات أبعاده فى لحظة ما هى ٣ ، ٤ ، ١٢ سم ، فإذا كان معدل تزايد البعد الاول =٢سم/ث ومعدل تزايد البعد الثانى = ١سم/ث ومعدل تناقص البعد الثالث =٣سم/ث فإذا علم أن القطعة تظل محتفظة بشكلها أوجد معدل تغير**

**١ حجم قطعة الثلج فى نهاية الثانية الثانية**

**٢ المساحة السطحية لقطعة الثلج فى نهاية الثانية الثانية**



البعد الاول = ٣+٢ن ، البعد الثانى = ٤ + ن ، البعد الثالث = ١٢ -٣ن

١ ح = س × ص × ع = (٣+٢ن)(٤+ن)(١٢-٣ن)

$\therefore \frac{ءع}{ءن} = ٢(٤+ن)(١٢-٣ن) + (٣+٢ن)(١٢-٣ن) - ٣(٣+٢ن)(٤+ن)$

وعند ن = ٢ $\therefore \frac{ءع}{ءن} = ٢×٦×٦+٧×٦-٣×٧×٦ = -١٢$ سم$^٣$/ث

٢ م = ٢(س ص + ص ع + س ع)

= ٢[(٣+٢ن)(٤+ن) + (٤+ن)(١٢-٣ن) +(٣+٢ن)(١٢-٣ن)]

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ٢[ ٢(٤+ن) + (٣+٢ن) + (١٢-٣ن) -٣(٤+ن) + ٢(١٢-٣ن) -٣(٣+٢ن) ]$

وعند ن = ٢ $\therefore \frac{ءم}{ءن} = ٢[ ٢×٦ + ٧ + ٦ -٣×٦ + ٢×٦ -٣×٧ ] = -٤$ سم$^٢$/ث

**[٢٣] نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد بعدى المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار أوجد طول نصف قطر الدائرة الذى يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن**



ص

٢س

محيط النافذة = ٢س + ٢ص + $\pi$س = ٦ $\therefore$ ص = ٦ – ٢س – $\pi$ س

$\because$ مساحة النافذة = س ×ص + $\frac{١}{٢}\pi$س$^٢$

م = س(٦ – ٢س – $\pi$ س) + $\frac{١}{٢}\pi$س$^٢$ =٦س -٢س$^٢$ - $\pi$س$^٢$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س مرتين

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٦ ـ ٤س ـ ٢πس ، $\frac{د^٢م}{دس^٢}$ = ـ ٤ ـ ٢π < ٠ ، بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢ + \pi}$ ≈ ٠,٥٨ قيمة عظمى

∴ أكبر قيمة للمساحة = ٦×٠,٥٨ ـ ٢×٠,٥٨$^٢$ ـ π×٠,٥٨$^٢$ ≈ ١,٧٥ متر$^٢$

**[٢٤]** إذا كانت د(س) = س$^٣$ + م س$^٢$ +ب س + ٤ حيث م ، ب ثابتان أوجد قيمتى م ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س=٢ ، ونقطة انقلاب عند س=١



د´(س) =٣س$^٢$ + ٢مس + ب ، د´´(س) =٦س + ٢م ∵ عند س=١ نقطة انقلاب

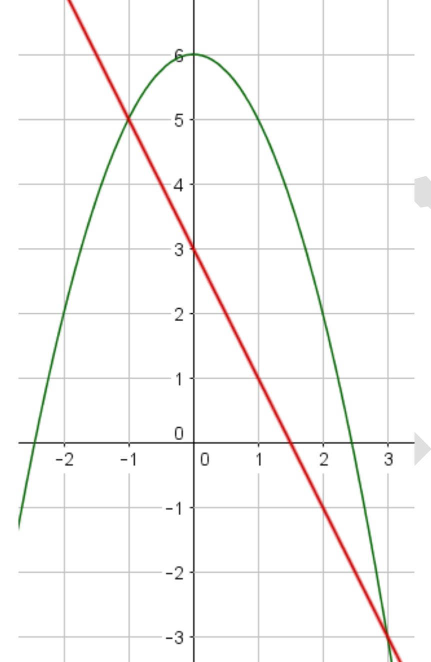
∴ د´´(١) = ٠ ∴ م = ـ٣ ، ∵ س=٢ قيمة صغرى ∴ د´(٢) = ٠

∴ ٣×٤+٢×ـ٣×٢+ب=٠ ∴ ب = ٠

**[٢٥]** أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين

❶ ص + س$^٢$ = ٦ ، ص +٢س ـ ٣=٠ ❷ ص=(س-١)$^٢$ ، ص ـ س +١ =٠





❶ ص = ٦ـ س$^٢$ ، ص =٣ـ٢س

نوجد نقاط التقاطع ∴ ٦ـس$^٢$ = ٣ـ٢س

∴ س$^٢$ ـ٢س ـ ٣ = ٠ ∴ س=ـ١ ، س=٣

المساحة المحصورة = $\left| \int_{-١}^{٣} (٦ - س^٢) - (٣ - ٢س) \, دس \right|$

= $\left| \int_{-١}^{٣} (٣ + ٢س - س^٢) \, دس \right| = \left| \left[ ٣س + س^٢ - \frac{١}{٣}س^٣ \right]_{-١}^{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$

❷ حاول بنفسك



(بوكلت ٤)

**[٢٦]** أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{لـو(٣ + س) - لـو(٣ - س)}{س}$ = .....

( ـ$\frac{١}{٣}$ لـو$_هـ$ ، ـ$\frac{٢}{٣}$ لـو$_هـ$ ، $\frac{٢}{٣}$ لـو$_هـ$ ، ٠ )

**الحل الاول:** باستخدام الحاسبة أو قاعدة لوبيتال باشتقاق البسط والمقام ثم ايجاد النهاية بالتعويض

**الحل الثانى:**

$$= \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}\frac{(\text{٣}+\text{س})}{(\text{٣}-\text{س})}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}\left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)}{\text{س}}$$

، بوضع $\text{ص} = \frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}$ $\therefore \text{س} = \frac{\text{٣ص}}{\text{٢}+\text{ص}}$

عند س $\leftarrow$ ٠ $\therefore$ ص $\leftarrow$ ٠

$$= \underset{\text{ص}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{٢}+\text{ص})\,\text{لو}(\text{١}+\text{ص})}{\text{٣ص}} = \underset{\text{ص}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢}+\text{ص}}{\text{٣}} \times \frac{\text{لو}(\text{١}+\text{ص})}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{لو هـ}$$

**حل ثالث:**

$$= \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{لو}\frac{(\text{٣}+\text{س})}{(\text{٣}-\text{س})} = \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{لو}\left(\frac{\text{٣}+\text{س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{لو}\left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{س}}}$$

$$= \text{لو} \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{س}}} = \text{لو} \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{٣}-\text{س}}{\text{٢س}}\times\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\times\frac{\text{١}}{\text{س}}}$$

$$= \text{لو} \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{٣}-\text{س}}{\text{٢س}}}\right)^{\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\times\frac{\text{١}}{\text{س}}} = \text{لو} \underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{٣}-\text{س}}{\text{٢س}}}\right)^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}-\text{س}}}$$

$$= \text{لو} \left(\underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\text{١}+\frac{\text{٢س}}{\text{٣}-\text{س}}\right)^{\frac{\text{٣}-\text{س}}{\text{٢س}}}\right)^{\underset{\text{س}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{٢}}{\text{٣}-\text{س}}} = \text{لو هـ}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\,\text{لو هـ}$$

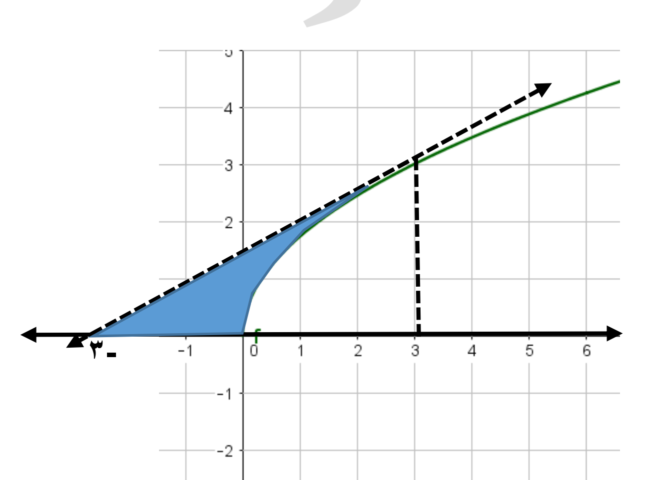
[٢٧] أوجد حجم المجسم الناشئ من الدوران دورة واحدة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{٣س}}$ ومحور السينات

❶ والمماس للمنحنى عند س=٣ ❷ والعمودى على المنحنى عند س=٣



❶ نوجد معادلة المماس عند س= ٣ ، ص=٣

$\text{ص}' = \frac{\text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣س}}}$ $\therefore$ ميل المماس $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}$



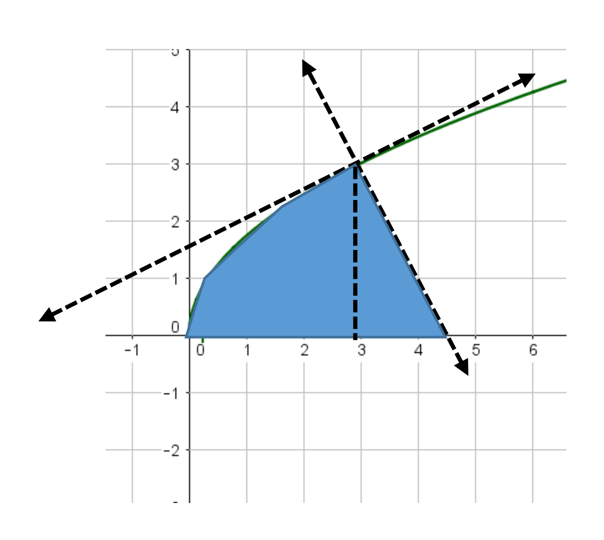
∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = \frac{١}{٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

**من الرسم المنطقة التى تحقق محصورة بين المنحنى**

**ومحور السينات والمماس هى المنطقة المظللة**

$$∴ ح = \pi \int_{-٣}^{٠} (\frac{١}{٢}س + \frac{٣}{٢})^٢ \, ءس - \pi \int_{٠}^{٣} ٣س \, ءس$$

$$= ١٨\pi - \frac{٢٧}{٢}\pi = \frac{٩}{٢}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$



❷ نوجد معادلة العمودى $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = -٢$

ص = -٢س + ٩ بوضع ص=٠ ∴ س = ٤,٥

$$∴ ح = \pi \int_{٠}^{٣} ٣س \, ءس + \pi \int_{٣}^{\frac{٩}{٢}} (-٢س + ٩)^٢ \, ءس$$

= ١٨ π وحدة مكعبة

**[٢٨]** أوجد أصغر بعد بين نقطة الأصل والمنحنى: س=٢جان – جا٢ن ، ص= ٢جتان – جتا٢ن



$$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٢جان - جا٢ن)^٢ + (٢جتان - جتا٢ن)^٢}$$

$$∴ ف = \sqrt{٤جا^٢ن + جا^٢٢ن - ٤جان جا٢ن + ٤جتا^٢ن + جتا^٢٢ن + ٢جتان جتا٢ن}$$

$$= \sqrt{٥ - ٤جان جا٢ن + ٤جتان جتا٢ن} = \sqrt{٥ + ٤(جتان جتا٢ن - جان جا٢ن)}$$

∴ ف = $\sqrt{٥ + ٤جتان}$ ∵ -١ ≤ جتا θ ≤ ١ ∴ أكبر بعد ف = ٣

وأصغر بعد ف = ٢ أو بالاشتقاق ونكمل

**[٢٩]** ملعب على شكل مستطيل ونصفى دائرتين مرسومتين على ضلعين متقابلين للمستطيل كما فى الشكل إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متر

ص

٢س

فأوجد أكبر مساحة للمستطيل

محيط الملعب = $٢\pi$ س + ٢ص = ٤٠٠ ∴ ص = ٢٠٠ – $\pi$ س

مساحة الشكل = م = ٢س × ص + $\pi$س$^{٢}$ = ٢س(٢٠٠ – $\pi$ س) + $\pi$س$^{٢}$

= ٤٠٠ س – ٢ $\pi$ س$^{٢}$ + $\pi$س$^{٢}$ = ٤٠٠ س – $\pi$ س$^{٢}$

∴ $\frac{دم}{دس} = ٤٠٠ - ٢\pi س$ ∴ بوضع $\frac{دم}{دس} = ٠$ ∴ س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$

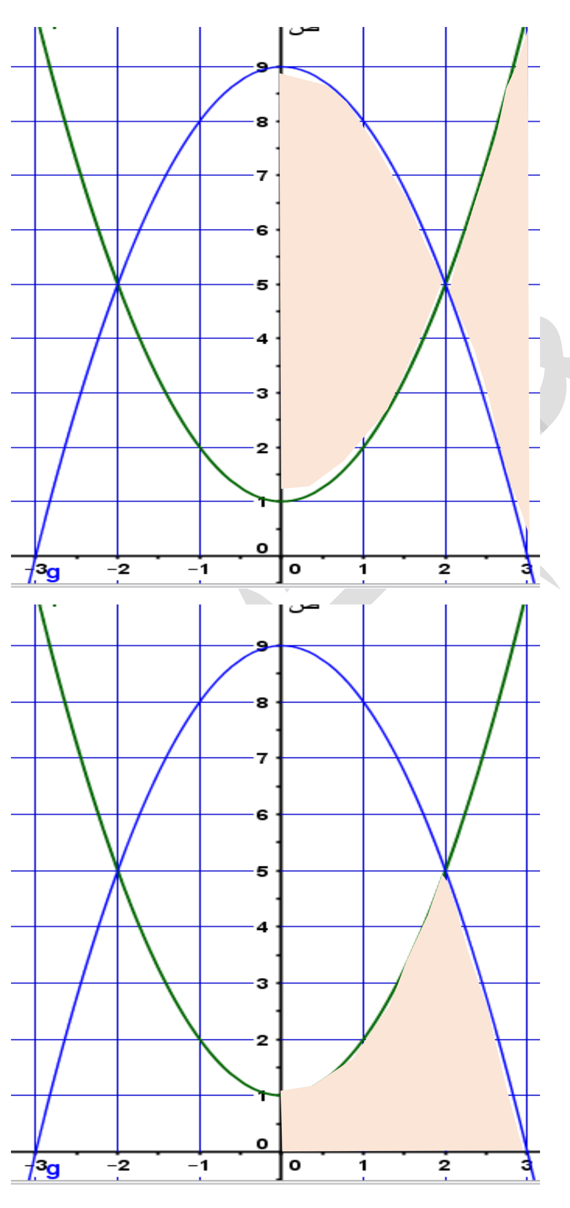
∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = -٢\pi$ < ٠ ∴ س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل = ٤٠٠ × $\frac{٢٠٠}{\pi}$ - $\pi(\frac{٢٠٠}{\pi})^{٢}$ = $\frac{٤٠٠٠٠}{\pi}$ وحدة مربعة

**[٣٠]** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص= ٩ – س$^{٢}$ ، ص= س$^{٢}$ + ١

① والمستقيمين س=٠ ، س=٣ ② والمستقيمين س=٠ ، س=٣ ، ومحور السينات






نوجد نقاط التقاطع ∴ ٩ – س$^{٢}$ = س$^{٢}$ +١ ∴ س= ±٢

نرسم كل من المنحنيين

① المساحة = $\left|\int_{٠}^{٢} [(٩ - س^{٢}) - (س^{٢} + ١)]\, دس\right|$

+ $\left|\int_{٢}^{٣} [(٩ - س^{٢}) - (س^{٢} + ١)]\, دس\right|$

= $\frac{٣٢}{٣}$ + $\frac{١٤}{٣}$ = $\frac{٤٦}{٣}$ وحدة مربعة

② المنطقة المظللة كما بالرسم

= $\int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ١)\, دس + \int_{٢}^{٣} (٩ - س^{٢})\, دس$

= $\frac{١٤}{٣}$ + $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة

[٣١] احسب قيمة التكامل $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}-س}$ ءس على الفترة [ ١+ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ + $\sqrt{١٠١}$ ]



بالقسمة بسطا ومقاما على $س^{٢}$ ∴ $\int_{١+\sqrt{٢}}^{١٠+\sqrt{١٠١}} \frac{١+\frac{١}{س^{٢}}}{س-\frac{١}{س}}$ ءس = $\left[ لـو_{هـ} |س-\frac{١}{س}| \right]_{١+\sqrt{٢}}^{١٠+\sqrt{١٠١}}$

= $لـو_{هـ}|١٠+\sqrt{١٠١}-\frac{١}{١٠+\sqrt{١٠١}}| - لـو_{هـ}|١+\sqrt{٢}-\frac{١}{١+\sqrt{٢}}|$ = $لـو_{هـ} ١٠$

[٣٢] أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $س^{قاس}$ عندما س=$\pi$



عند س = $\pi$ ∴ ص = $\pi^{قا\pi}$ = $\frac{١}{\pi}$

∵ ص = $س^{قاس}$ باخذ $لـو_{هـ}$ للطرفين ∴ $لـو_{هـ}$ص = قاس $لـو_{هـ}$س بالاشتقاق للطرفين

∴ $\frac{ص^{\prime}}{ص}$ = قاس ظاس × $لـو_{هـ}$س + قاس × $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{ص^{\prime}}{\frac{١}{\pi}}$ = قا$\pi$ ظا$\pi$ × $لـو_{هـ}\pi$ + قا$\pi$ × $\frac{١}{\pi}$

∴ $ص^{\prime}$ = ٠ + (-١)× $\frac{١}{\pi} \times \frac{١}{\pi}$ = $\frac{-١}{\pi^{٢}}$ ∴ معادلة المماس $\frac{ص-\frac{١}{\pi}}{س-\pi} = \frac{-١}{\pi^{٢}}$

∴ $\pi^{٢}$ص - $\pi$ = - س + $\pi$ ∴ $\pi^{٢}$ص + س = ٢$\pi$

[٣٣] تتحرك النقطة (س ، ص) على منحنى الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ +٤س -٨ص =١٠٨ عين موضع النقطة (س ، ص) على منحنى الدائرة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير الاحداثى السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير الاحداثى الصادى بالنسبة للزمن



بالاشتقاق بالنسبة لـ ن ∴ ٢س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءن}$ +٤ $\frac{ءس}{ءن}$ -٨ $\frac{ءص}{ءن}$ =٠ ، ∵ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{ءص}{ءن}$

∴ س + ص + ٢ - ٤ =٠ ∴ ص = ٢ – س بالتعويض فى معادلة الدائرة

∴ س$^٢$ +(٢-س)$^٢$ + ٤س -٨(٢-س) -١٠٨ = ٠ ∴ س =-١٠ ، س=٦

∴ النقط هى (-١٠ ، ١٢) ، (٦ ، -٤)

**[٣٤]** احسب قيمة التكامل $\int_{٠}^{٤}$ س$^٣$ $\sqrt{س^٢ + ٩}$ ءس

بفرض أن ع = س$^٢$ + ٩ ∴ ءع = ٢س × ءس ∴ س$^٢$ءس س = $\frac{١}{٢}$ س ءع ،

عند س=٠ ∴ ع=٩ ، عند س = ٤ ∴ ع =٢٥

∴ $\int_{٠}^{٤}$ س$^٣$ $\sqrt{س^٢+٩}$ ءس = $\int_{٠}^{٤}$ (س $\sqrt{س^٢+٩}$ )س$^٢$ءس = $\int_{٩}^{٢٥}$ $\frac{١}{٢}$(ع-٩) $\sqrt{ع}$ ءع

= $\int_{٩}^{٢٥}$ $\frac{١}{٢}$(ع$^{\frac{٣}{٢}}$ - ٩ع$^{\frac{١}{٢}}$)ءع = ٢٨٢,٤

**[٣٥]** إذا كانت د: ح$_+$ ← ح حيث د(س) = س لــوهس فإن

(أ)الدالة تزايدية على الفترة ] هـ ، ∞ [ (ب) الدالة تناقصية على الفترة ] ٠ ، $\frac{١}{هـ}$ [

(جـ) الدالة تناقصية على الفترة ] هـ ، ∞ [ (د) الدالة تزايدية على الفترة ] ٠ ، $\frac{١}{هـ}$ [

دَ(س) = لــوهس + $\frac{١}{س}$ × س = لــوهس + ١ بوضع دَ(س) = ٠ ∴ س = $\frac{١}{هـ}$

دَ(س)

٠ ---------- +++++++++

صفر $\frac{١}{هـ}$ ∞

لاحظ هـ ≈ ٢,٧١٨ ∴ $\frac{١}{هـ}$ ≈ ٠,٣٦٧

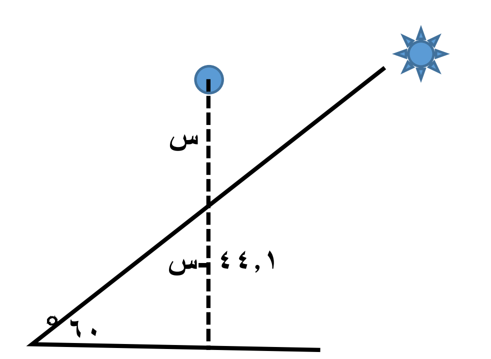
∴ الدالة تزايدية فى الفترة ] $\frac{١}{هـ}$ ، ∞ [ ، تناقصية ] ٠ ، $\frac{١}{هـ}$ [ ∴ الاختيار (د) الادق

ولم ناخذ (أ) لان الفترة مفتوحة عند هـ

## دليل التقويم

**[١] كرة تسقط من ارتفاع ٤٤,١ متر وكانت اشعة الشمس تميل على الافقى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد المعدل الزمنى الذى يتحرك به ظل الكرة على الارض فى اللحظة التى تلمس فيها الكرة سطح الارض**






$ف = ع.ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢$ ∴ $س = ٤,٩ ن^٢$

∴ $ظا ٦٠° = \frac{٤٤,١ - س}{ص}$

∴ $ص = \frac{٤٤,١ - ٤,٩ ن^٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ $\frac{دص}{دن} = -\frac{٩,٨ ن}{\sqrt{٣}}$

وعندما تصل الكرة لسطح الارض $٤٤,١ = ٤,٩ ن^٢$ ∴ ن = ٣

∴ $\frac{دص}{دن} = -\frac{٩,٨ \times ٣}{\sqrt{٣}} = -\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٥}$ م/ث

**حل آخر:**

∵ $ع^٢ = ع.^٢ + ٢ جـ ف$ ∴ $ع^٢ = ٠ + ٢ \times ٩,٨$ س بالاشتقاق بالنسبة للزمن

∴ $٢ ع \frac{دع}{دن} = ١٩,٦ \frac{دس}{دن}$ وعندما تصل الكرة لسطح الارض ∴ س = ٤٤,١ ، ع = ٢٩,٤ م/ث

، $\frac{دس}{دن} = ع = ٢٩,٤$ لان السرعة معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

∵ $ظا ٦٠° = \frac{٤٤,١ - س}{ص}$ ∴ $ص = \frac{٤٤,١ - س}{\sqrt{٣}}$

∴ $\frac{دص}{دن} = \frac{-١}{\sqrt{٣}} \times \frac{دس}{دن} = \frac{-١}{\sqrt{٣}} \times ٢٩,٤ = -\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٥}$ م/ث

**[٢] إذا كانت ص= جا θ فأوجد $ص^{(١٠٠٠)}$**



∵ $جا θ = \frac{هـ^{تθ} - هـ^{-تθ}}{٢ت}$

$$\therefore \text{ص}^{(1000)} = \frac{\text{ت}^{1000}\,\text{هـ}^{\text{ت}\theta} - (-\text{ت})^{1000}\,\text{هـ}^{-\text{ت}\theta}}{2\text{ت}} = \frac{\text{هـ}^{\text{ت}\theta} - \text{هـ}^{-\text{ت}\theta}}{2\text{ت}} = \text{جا}\,\theta$$

**[٣]** إذا كان $\text{س}^3 + 3\text{س}^2\text{ص} + 3\text{س}\,\text{ص}^2 + \text{ص}^3 = 15$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = $ ....... ( ١ ، -١، ٣، -٣ )



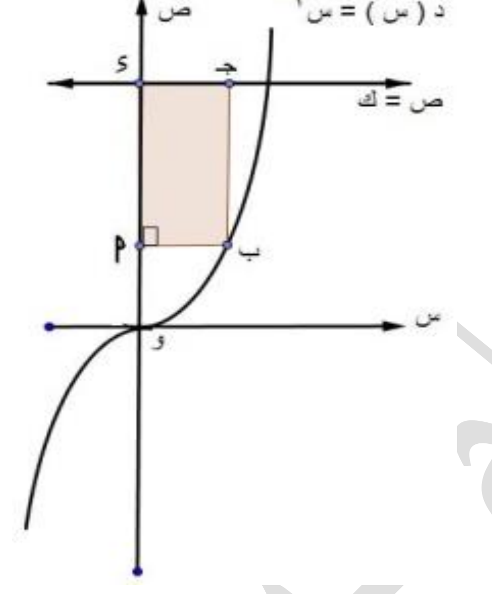
$(\text{س} + \text{ص})^3 = 15 \quad \therefore\ 3(\text{س} + \text{ص})^2 (1 + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}) = 0 \quad \therefore\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$

**[٤]** $\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^3}{\text{س}^4 + \text{جتاس}}\,\text{دس} = $ ....... (-١ ، صفر ، ١ ، ٤)



∵ الدالة فردية وحدود التكامل من –أ الى أ ∴ $\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^3}{\text{س}^4 + \text{جتاس}}\,\text{دس} = $ صفر

**[٥]** فى الشكل المقابل:




إذا كانت اكبر مساحة للمستطيل أب جـ ء يساوى ٤٨ وحدة مربعة

اوجد قيمة ك





بفرض نقطة ب(س ، ص) ∴ $\text{ص} = \text{س}^3$ ∴ ب$(\text{س} ، \text{س}^3)$

$\text{مـ} = \text{س}(\text{ك} - \text{ص}) = \text{س}(\text{ك} - \text{س}^3) = \text{ك}\,\text{س} - \text{س}^4$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دس}} = \text{ك} - 4\text{س}^3$ بوضع $\frac{\text{دم}}{\text{دس}} = 0$ ∴ $\text{ك} = 4\text{س}^3 \Leftarrow (1)$

∵ المساحة ثابتة ∴ $48 = \text{ك}\,\text{س} - \text{س}^4 \Leftarrow (2)$ من (١) ، (٢)

∴ $48 = 4\text{س}^4 - \text{س}^4$ ∴ $\text{س} = \pm 2$ ∴ $\text{ك} = \pm 32$ ∴ ك = ٣٢ لان ص=ك أعلى محور السينات

**[٦]** فى الشكل المقابل إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{د(س)} = 7$ ، $\int_{\text{و}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{د(س)} = 2$

وكان $\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = 30$ وحدة مربعة

فإن $\text{م}_2 = $ ........وحدة مربعة.

(٢١ ، ١٤ ، ٩، ٧)

م١ + م٢ + م٣ = ٣٠ ⇐ (١) ∵ $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = ٧$ ∴ م١ - م٢ = ٧ ⇐ (٢)

، ∵ $\int_{و}^{جـ} د(س)\,ءس = ٢$ ∴ م٣ - م٢ = ٢ ⇐ (٣) بجمع (٢) ، (٣)

∴ م١ + م٣ - ٢م٢ = ٩ بالتعويض من(١) ∴ ٣٠ – ٣ م٢ = ٩ ∴ م٢ = ٧

**[٧]** م ب جـ مثلث رؤوسه النقط (٠ ، ٠ ) ، (٥ ، ٠ ) ، (٨ ، ٣) أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشئ من دوران سطح هذا المثلث دورة كاملة حول محور السينات

بفرض و(٠ ، ٠) ، ب(٥ ، ٠) ، م(٨ ، ٣)

نوجد معادلة $\overleftrightarrow{مب}$ هى $\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٥}$ ∴ ص = س - ٥

، نوجد معادلة $\overleftrightarrow{مو}$ هى $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٠}$ ∴ ص = $\frac{٣}{٨}$ س

∴ ح = $\pi \int_{٠}^{٨} \frac{٩}{٦٤} س^{٢}\,ءس - \pi \int_{٥}^{٨} (س - ٥)^{٢}\,ءس$ = ٢٤ π - $\frac{٩}{٢}\pi$ = ١٩,٥ π وحدة مكعبة

**[٨]** إذا كانت النقط م(٠ ،٩) ، ب(٠ ،٤) ، النقطة جـ ∈ $\overleftarrow{وس}$

أوجد إحداثى جـ ليكون قياس ($\widehat{مجـب}$) أكبر ما يمكن



بفرض جـ (س ، ٠) ∴ ظا θ = $\frac{٤}{س}$ ، ظا ∝ = $\frac{٩}{س}$

∴ ص= ظا ($\widehat{مجـب}$) = ظا (∝ - θ) = $\frac{ظا\alpha - ظا\theta}{١ + ظا\alpha ظا\theta} = \frac{\frac{٩}{س} - \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٣٦}{س^{٢}}} = \frac{٥س}{س^{٢} + ٣٦}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥(س^{٢}+٣٦) - ٢س \times ٥س}{(س^{٢}+٣٦)^{٢}} = \frac{٣٦ - ٥س^{٢}}{(س^{٢}+٣٦)^{٢}}$ بوضع $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ∴ س = ± $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$

∴ س = $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$ قيمة عظمى

د´(س): -------------- ٠ ++++++++ ٠ --------------

-∞ ، $\frac{-٦}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$ ، ∞

∴ ظا (أ̂جب) = $\frac{٥\sqrt{٥}}{٣٦}$   ∴ ق(∠أجـ ب) = ١٧° ١٥′

**[٩]** أوجد: $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^٢}\,\text{ءس}$ باستخدام التكامل بالتجزئ

بوضع ص = س هـ$^{\text{س}}$ ∴ ءص = (س+١) هـ$^{\text{س}}$ ءس   ∴ ءع = (س + ١)$^{-٢}$

∴ ع = -(س + ١)$^{-١}$   ∴ $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^٢}\,\text{ءس} = -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} - \int -\frac{١}{\text{س}+١}(\text{س}+١)\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

**[١٠]** منشور ثلاثى قائم ارتفاعه ع سم وقاعدته مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه س سم فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ١سم/ث بينما يتناقص ارتفاعه بمعدل ١سم/ث. فأوجد العلاقة بين ع، س عند اللحظة التى يكون فيها الجسم ثابتا



مساحة القاعدة = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س$^٢$ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ١ سم/ث ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = -١ سم/ث

∵ ح = $\frac{١}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س$^٢$ × ع بالاشتقاق بالنسبة للزمن ∴ ٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٢}\left(٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\times\text{ع} + \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\times\text{س}^٢\right)$

∴ ٠ = ٢س×١×ع ـــ س$^٢$   ∴ ٢ع = س

**[١١]** إذا كانت: د(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + \text{س}^٢ & \text{عندما س} < ٠ \\ ٢\text{س} - \text{س}^٢ & \text{عندما س} \geq ٠ \end{cases}$

(أ) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة فى [٠ ، ٥]     (ب) أوجد $\int_{-١}^{٢} \text{د(س)}\,\text{ءس}$



**حاول بنفسك**

## كتاب المدرسة

**[١] باستخدام التكامل المحدد أثبت أن:**

**(أ)** حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق$^{٣}$ (نق طول نصف قطر الكرة)

**(ب)** حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = $\pi$ نق$^{٢}$ ع حيث نق طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة ، ع ارتفاعها

**(جـ)** مساحة المثلث الذى طول قاعدته أ وارتفاعه ب تساوى $\frac{١}{٢}$ أ ب

**(أ)** الكرة تنشأ من دوران نصف دائرة طول نصف قطرها نق

ص$^{٢}$ = نق$^{٢}$ - س$^{٢}$

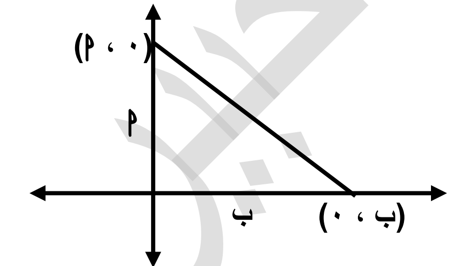
$$\text{حجم الكرة} = \pi\int_{-\text{نق}}^{\text{نق}}(\text{نق}^{٢}-\text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٢\pi\int_{٠}^{\text{نق}}(\text{نق}^{٢}-\text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٢\pi\left[\text{نق}^{٢}\text{س}-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{\text{نق}}$$

$$= ٢\pi\left[\text{نق}^{٣}-\frac{١}{٣}\text{نق}^{٣}\right] = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^{٣}$$

**(ب)** الاسطوانة الدائرية القائمة تنشأ من دوران مستطيل حول احد المحورين

معادلة المستقيم ص= نق

$$\therefore \text{حجم الاسطوانة} = \pi\int_{٠}^{\text{ع}}\text{نق}^{٢}\,\text{دس} = \pi\left[\text{نق}^{٢}\,\text{س}\right]_{٠}^{\text{ع}} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$$




**(جـ)** معادلة المستقيم $\frac{\text{ص}-٠}{\text{س}-\text{ب}} = \frac{٠-\text{أ}}{\text{ب}-٠}$

$$\therefore \text{ص} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}(\text{س}-\text{ب})$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \int_{٠}^{\text{ب}}\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}(\text{س}-\text{ب})\,\text{دس} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}\left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-\text{ب}\,\text{س}\right]_{٠}^{\text{ب}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}\left(\frac{١}{٢}\text{ب}^{٢}-\text{ب}^{٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{أ}\,\text{ب}$$

**[٢] حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د حيث د(س) =س + ٢جاس ، ٠ < س < ٢$\pi$**



**د´(س) = ١ + ٢ جتاس بوضع د´(س) = ٠ ∴ جتا س = - $\frac{١}{٢}$ ∴ س تقع فى الربع الثانى أو الثالث**

**∴ س = ١٢٠° = $\frac{٢}{٣}\pi$ ، س =٢٤٠ = $\frac{٤}{٣}\pi$**

د´(س) ، صفر ، ++++ ، ٠ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، -------- ، ٠ ، $\frac{٤}{٣}\pi$ ، ++++ ، ٢$\pi$

**تزايدية فى ] ٠ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ [ ، ] $\frac{٤}{٣}\pi$ ، ٢$\pi$ [**

**تناقصية ] $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{٤}{٣}\pi$ [**

**[٣] أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ① إذا كان ص=جاع ، س=جتاع ② إذا كان ص= ن ، س=$\sqrt{ن}$**



**❶ بتربيع المعادلتين والجمع ∴ س٢ + ص٢ = جا٢ع + جتا٢ع = ١ بالاشتقاق بالنسبة لـ س**

**∴ ٢س + ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = - $\frac{س}{ص}$**

**❷ ص = س٢ وذلك بالتعويض من المعادلة الثانية فى الاولى ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س**

**[٤] أوجد مشتقة (٤س٣ - ٩س٢ +٥) بالنسبة إلى (٣س٢ + ٧)**



**بفرض ص =(٤س٣ - ٩س٢ +٥) ، ع =(٣س٢ + ٧) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ =١٢س٢-١٨س ، $\frac{ءع}{ءس}$ =٦س**

**∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = \frac{١٢س^٢ - ١٨س}{٦س}$ =٢س - ٣**

**[٥] إذا كانت ص= قاس (جاس + جتاس) أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ − ظا٢س = ١**



**ص=قاس جاس + قاس جتاس = ظاس +١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ =قا٢س**

**∴ الطرف الايمن = $\frac{ءص}{ءس}$ − ظا٢س =قا٢س − ظا٢س =١ تذكر ١+ ظا٢س = قا٢س**

**[٦] إذا كان د(٢س+١) = س$^{٢}$ أوجد د′(٥)**



**بالاشتقاق بالنسبة لـ س ∴ د′(٢س+١) × ٢ = ٢س ∴ د′(٢س+١) = س ∴ ٢س + ١ = ٥**

**∴ س = ٢ ∴ د′(٥) = ٢**

**حل آخر: بفرض ع = ٢س + ١ ∴ $\frac{دع}{دس}$ = ٥ ، س = $\frac{١}{٢}$(ع − ١) ∴ د(ع) = $\frac{١}{٤}$(ع − ١)$^{٢}$**

**∴ د′(ع) = $\frac{١}{٢}$(ع − ١) ∴ د′(٥) = $\frac{١}{٢}$(٥ − ١) = ٢**

**[٧] إذا كان د(س) = س$^{٣}$ + ١ ، ر(س) = ٣س و كان ص = (د o ر)(س) أوجد $\frac{دص}{دس}$**



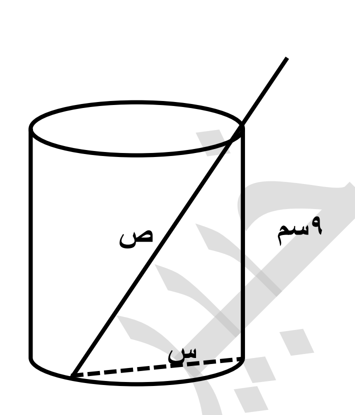
**ص = د(ر(س)) = د(٣س+٧) ∴ ص′ = د′(٣س+٧) × ٣ ⇐ (١)**

**∵ د′(س) = ٣س$^{٢}$ ⇐ (٢) ∴ د′(٣س+٧) = ٣(٣س+٧)$^{٢}$ ∴ ص′ = ٩(٣س+٧)$^{٢}$**

**حل آخر : ص = د(ر(س)) = د(٣س+٧) = (٣س+٧)$^{٣}$ + ١ ∴ ص′ = ٩(٣س+٧)$^{٢}$**

**[٨] اناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩سم وطول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦سم وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦ سم فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢سم/ث أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها**






**$\frac{دص}{دن}$ = ٢سم/ث ، عندما تصل نهاية القاعدة ∴ س = ١٢ ، ص = ١٥**

**لاحظ لم نفرض ص طول الجزء الخارج لانها تنزلق مبتعدة**

**ص$^{٢}$ = ٨١ + س$^{٢}$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن**

**∴ ٢ص × $\frac{دص}{دن}$ = ٢س × $\frac{دس}{دن}$ ∴ ٢×١٥×٢ = ٢ × ١٢ × $\frac{دس}{دن}$**

**∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{٥}{٢}$ سم/ث**

**[٩]** أوجد $\int \frac{٤}{س\ لو_{هـ}٣س}\ ءس$



بفرض أن $ص = لو_{هـ}٣س$ ∴ $ءص = \frac{ءس}{س}$

∴ $\int \frac{٤}{س\ لو_{هـ}٣س}\ ءس = \int \frac{٤}{ص}\ ءص = ٤\ لو_{هـ}|ص| + ث = ٤\ لو_{هـ}|٣س| + ث$

**[١٠]** ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = س|س - ٤|$

من تعريف المقياس $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤س & \text{عندما } س \geq ٤ \\ -(س^٢ - ٤س) & \text{عندما } س < ٤ \end{cases}$ نلاحظ أن كلا القاعدتين دوال كثيرات الحدود ∴ نبحث قابلة للاشتقاق عند س=٤

متصلة عند س=٤

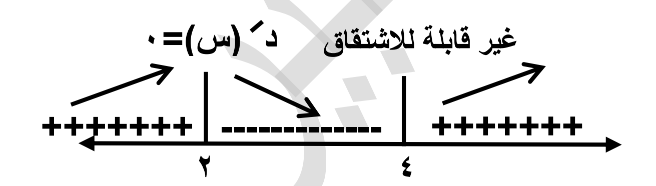
∵ $د´(٤^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٤+هـ) - د(٤)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{(٤+هـ)^٢ - ٤(٤+هـ) - ٠}{هـ} = ٤$

، $د´(٤^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٤+هـ) - د(٤)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-[(٤+هـ)^٢ - ٤(٤+هـ)] - ٠}{هـ} = -٤$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س=٤ ∴ س=٤ نقطة حرجة

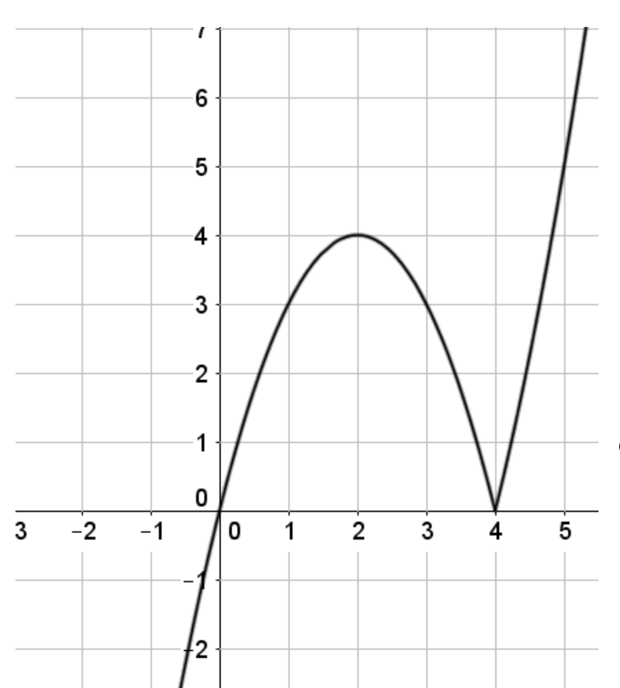
بوضع $د´(س) = ٠$ ∴ س=٢ ∴ النقط الحرجة س=٢ ، س=٤

∴ $د´(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & \text{عندما } س > ٤ \\ \text{غير قابلة للاشتقاق} & \text{عندما } س = ٤ \\ -(٢س - ٤) & \text{عندما } س < ٤ \end{cases}$




الدالة تزايدية فى الفترة ح – [٢ ، ٤]

وتناقصية فى [٢ ، ٤]




∴ $د''(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٤ \\ \text{غير قابلة للاشتقاق} & \text{عندما } س = ٤ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٤ \end{cases}$

المنحنى محدب لاعلى فى الفترة ] - ∞ ، ٤ [

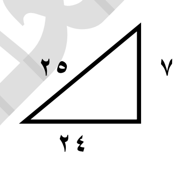
، المنحنى محدب لاسفل فى الفترة ] ٤ ، ∞ [

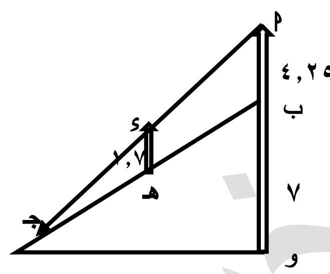
لا يوجد نقطة انقلاب عند س=٤ لانها غير قابلة للاشتقاق

بوضع د(س)=٠ ∴ نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات

(٠، ٠) ، (٤ ، ٠)

**[١١]** يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦م/دقيقة أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ وطوله ٢٥ متراً وهناك مصباح مثبت على ارتفاع $١١\frac{١}{٤}$ متراً فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسياً فوق أعلى نقطة للمنحدر أوجد معدل انكماش طول ظل الرجل وكذلك معدل اقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر [ ٤م/د ، ١٠ م/د ]




بفرض جـ هـ = س متر

ب هـ = ص متر ، ب و= ٢٥ × $\frac{٧}{٢٥}$=٧ متر

∴ أب=١١,٢٥-٧=٤,٢٥ متر

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{ءهـ}$ ∴ Δ جـهـء~Δجـبأ

∴ $\frac{جهـ}{جب} = \frac{هـء}{أب}$ ∴ $\frac{س}{س+ص} = \frac{١,٧}{٤,٢٥} = \frac{٢}{٥}$ ∴ ٥س = ٢(س+ ص) ∴ ٣س=٢ص

∴ $٣\frac{ءس}{ءن} = ٢\frac{ءص}{ءن}$ =٢×٦ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$=٤ م/د لاحظ أن معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن =السرعة

ف = س+ص =بعد نهاية الظل من أعلى نقطة ∴ $\frac{ءف}{ءن} = \frac{ءس}{ءن} + \frac{ءص}{ءن}$ =٤+٦=١٠ م/د

**[١٢]** أوجد $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س}+٣}\, ءس$



$= \frac{1}{2} \int \frac{2 هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 3} \, ءس = \frac{1}{2} لـو_{هـ} | هـ^{2س} + 3 | + ث$

**[13]** أوجد $\int \frac{1}{س(لـو_{هـ} س)^{2}} \, ءس$



$= \int (لـو_{هـ} س)^{-2} \times \frac{1}{س} \, ءس = -(لـو_{هـ} س)^{-1} + ث$

# تجميع من مصادر اخرى

## أختر الاجابة الصحيحة

[١] $\int_{0}^{4} \frac{1}{س-2} ءس$ = .......... ( ٢ ، لـو$_{هـ}$٢ ، لـو$_{هـ}|س-2|+ث$ ، غير ذلك )



نلاحظ ان الدالة غير متصلة عند س=٢ ∋ [٠ ، ٤] وشرط لايجاد التكامل أن تكون الدالة متصلة

∴ الاختيار الصواب غير ذلك

[٢] (المستشار) أوجد $\lim_{س \to 0} (2+س)^{\frac{1}{س}}$



ليست على الصورة المعتادة ولايمكن وضعها عليها لذلك نبحث النهاية اليمنى واليسرى

$\lim_{س \to 0^+} (2+س)^{\frac{1}{س}} = (2+0)^{\frac{1}{0^+}} = 2^{\infty} = \infty$ ، $\lim_{س \to 0^-} (2+س)^{\frac{1}{س}} = (2+0)^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0$

∴ د($0^+$) ≠ د($0^-$) ∴ النهاية غير موجودة

[٣] أوجد $\int \frac{هـ^{2س}+1}{هـ^{-س}+1} ءس$



بفرض ص = هـ$^{س}$ ∴ ء ص = هـ$^{س}$ ءس

$\int \frac{هـ^{2س}+1}{هـ^{س}+1} \times هـ^{س} ءس = \int \frac{ص^2+1}{ص+1} \times ءص = \int \frac{ص^2-1+2}{ص+1} \times ءص$

$= \int \frac{ص^2-1}{ص+1} \times ءص + \int \frac{2}{ص+1} \times ءص = \int (ص-1) ءص + \int \frac{2}{ص+1} \times ءص$

$= \frac{1}{2}ص^2 - ص + 2لـو_{هـ}|ص+1| + ث = \frac{1}{2}هـ^{2س} - هـ^{س} + 2لـو_{هـ}|هـ^{س}+1| + ث$

**[٤]** أوجد $\int \frac{1}{\sqrt{س} + \sqrt[4]{س^{3}}} \, ءس$



بوضع س= $ص^{4}$ ∴ ءس = ٤$ص^{3}$ ءص ∴ $\int \frac{1}{\sqrt{س} + \sqrt[4]{س^{3}}} \, ءس = \int \frac{4ص^{3}}{ص^{2} + ص^{3}} \, ءص$

$= \int \frac{4ص^{3}}{ص^{2}(1+ص)} \, ءص = \int \frac{4ص}{(1+ص)} \, ءص = 4\int \frac{1+ص-1}{(ص+1)} \, ءص = 4\int \left(1 - \frac{1}{ص+1}\right) ءص$

$= 4(ص - لو_{هـ}|1+ص|) + ث = 4\sqrt[4]{س} - 4لو_{هـ}|1+\sqrt[4]{س}| + ث$

حل آخر: بالضرب بسطا ومقاماً × $س^{\frac{1}{4}}$ ونكمل

حل ثالث : بفرض س=جا⁴ص ونكمل

**[٥]** أوجد $\int \frac{1 + جتا2س + 2قاس}{2جاس + جا2س} \, ءس$



$= \int \frac{1 + 2جتا^{2}س - 1 + 2قاس}{2جاس + 2جاسجتاس} \, ءس = \int \frac{جتا^{2}س + قاس}{جاس + جاسجتاس} \, ءس$ ÷ جتاس

$= \int \frac{جتاس + قا^{2}س}{ظاس + جاس} \, ءس = لو_{هـ}|ظاس + جاس| + ث$

**[٦]** اذا كان المماس للمنحنى $س^{2} - ص^{2} = 16$ يمر بالنقطة (٢ ، -٢) أوجد معادلة هذا المماس

∵ النقطة لا تحقق معادلة المنحنى ∴ فهى ليست نقطة التماس ∴ نفرض نقطة التماس (أ، ب)

∵ $س^{2} - ص^{2} = 16$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س ∴ ٢س – ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص} = \frac{أ}{ب}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص+2}{س-2} = \frac{أ}{ب}$ ، ∵ نقطة التماس تحقق معادلة المماس ∴ $\frac{ب+2}{أ-2} = \frac{أ}{ب}$

∴ $ب^{2} + 2ب = أ^{2} - 2أ$ ∴ $أ^{2} - ب^{2} = 2أ + 2ب$ ⇐ (١)

∵ نقطة التماس تحقق معادلة المنحنى ∴ $أ^{2} - ب^{2} = 16$ ⇐ (٢)

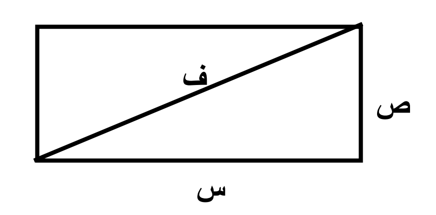
**من(١) ، (٢)  ∴ أ + ب = ٨ ⇐ (٣)  من (٣) ∴ أ = ٨ − ب بالتعويض فى (٢)**

**∴ (٨- ب)$^{٢}$ -ب$^{٢}$ = ١٦  ∴ ٦٤ -١٦ب + ب$^{٢}$ -ب$^{٢}$ = ١٦  ∴ ب = ٣  ∴ أ = ٥**

**∴ يوجد نقطة التماس أ(٥، ٣)  ∴ معادلة المماس هى** $\frac{\text{ص}+٢}{\text{س}-٢}=\frac{٥}{٣}$ **∴ ٣ص = ٥س - ١٦**

**[٧] مستطيل مساحته ١٦ سم$^{٢}$ أوجد بعديه عندما يكون طول قطره أصغر ما يمكن**






**س ص = ١٦ ∴ ص =** $\frac{١٦}{\text{س}}$ **∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ف$^{٢}$**

**∴ ف$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ١٦س$^{-٢}$ ∴ ٢ف** $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ **= ٢س - ٣٢س$^{-٣}$**

**بوضع** $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ **= ٠ ∴ س = ٤ ، ص=٤**

**∴ بعدى المستطيل ٤ سم ، ٤سم يكون عندها القطر اصغر ما يمكن**

**[٨] أوجد:** $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}}}$



**بفرض ص =** $\sqrt[٣]{\text{س}}$ **∴ ص$^{٣}$ = س ∴ ٣ص$^{٢}$ ءص = ء س**

$$∴ \int \frac{\text{ءس}}{\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}}} = \int \frac{٣\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}}{\text{ص}^{٣} - \text{ص}} = \int \frac{٣\text{ص}\,\text{ءص}}{\text{ص}^{٢} - ١} = \frac{٣}{٢}\int \frac{٢\text{ص}\,\text{ءص}}{\text{ص}^{٢} - ١} = \frac{٣}{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}^{٢} - ١| + \text{ث}$$

**[٩] أوجد** $\int_{٤}^{٥} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}\ \text{ءس}$



$$= \int_{٤}^{٥} |\text{س} - ٣|\ \text{ءس} = \int_{٤}^{٥} (\text{س} - ٣)\ \text{ءس} = ١,٥$$

**[١٠] أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة فى الربع الاول والمحصورة بين ص=٢ ومحور الصادات والمنحنى د(س)= س$^{٢}$ والمنحنى ر(س) = $\frac{١}{س}$ حول محور الصادات**



**نقط تقاطع المنحنين س$^{٢}$ = $\frac{١}{س}$ ∴ س=١**

$$ح = \pi \int_{٠}^{١} ص\, دص + \pi \int_{١}^{٢} \frac{١}{ص^{٢}}\, دص$$

$$= \frac{١}{٢}\pi + \frac{١}{٢}\pi = \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

**[١١] أوجد** $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{لـو_{هـ}(س^{٢}+س+١)}{س}$



$$= \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١}{س} لـو_{هـ}(س^{٢}+س+١) = \underset{س \to ٠}{نهـا} لـو_{هـ}(س^{٢}+س+١)^{\frac{١}{س}} = لـو_{هـ} \underset{س \to ٠}{نهـا} (١+(س^{٢}+س))^{\frac{١}{س}}$$

$$= لـو_{هـ} \underset{س \to ٠}{نهـا} \left[(١+(س^{٢}+س))^{\frac{١}{(س^{٢}+س)}}\right]^{\frac{(س^{٢}+س)}{س}}$$ ⇒ **فكرة**

$$= لـو_{هـ} \underset{س \to ٠}{نهـا} \left[(١+(س^{٢}+س))^{\frac{١}{(س^{٢}+س)}}\right]^{(س+١)}$$

$$= لـو_{هـ} \left[\underset{س \to ٠}{نهـا} (١+(س^{٢}+س))^{\frac{١}{(س^{٢}+س)}}\right]^{\underset{س \to ٠}{نهـا}(س+١)} = لـو_{هـ}(هـ)^{١} = ١$$

**[١٢] اذا كان د(جاس) = جا$^{٢}$س أوجد قيمة د″($\frac{\pi}{٤}$) ، د$^{(٣)}$($\frac{\pi}{٤}$)**



**د´(جاس)جتاس = ٢ جاس × جتاس ∴ د´(جاس) = ٢ جاس ∴ د″(جاس)جتاس = ٢ جتاس**

∴ د$''$(جاس) = ٢ ∴ د$''$( $\frac{\pi}{٤}$ ) = ٢ ، د$^{(٣)}$( $\frac{\pi}{٤}$ ) = ٠

**[١٣]**

